Überkritische, stationäre, sphärisch-symmetrische Akkretion in ein schwarzes Loch

D. Freihoffer

München 1981

Überkritische, stationäre, sphärisch-symmetrische Akkretion in ein schwarzes Loch

Dissertation der Fakultät für Physik

der Ludwig-Maximilians-Universität

München

vorgelegt von

Dieter Freihoffer

aus Passau

München, den 21.5.1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1.Gutachter:Prof.Dr.J.Ehlers

2.Gutachter:Prof.Dr.G.Süßmann

Betreuer der Arbeit:Dr.G.Börner

Tag der Mündlichen Prüfung: 26. Jan. 81

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

I Einleitung und Zusammenfassung

II Grundlegende Eigenschaften der sphärisch-symmetrischen Akkretion in ein schwarzes Loch

III Verhalten der Materie in großer Entfernung vom schwarzen Loch

IV Die hydrodynamischen Gleichungen

1. Näherungen und Annahmen

2. Ableitung der Gleichungen

V Die Diffusionsgleichung

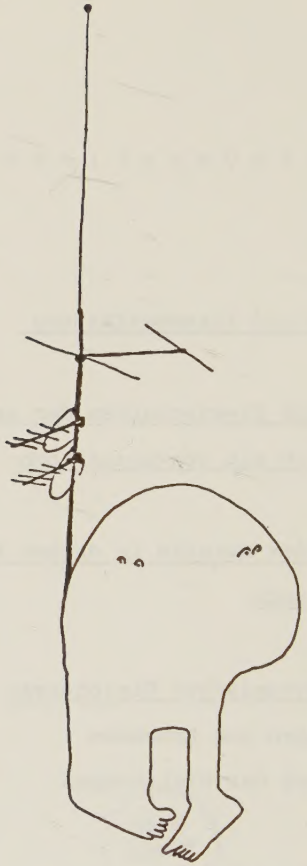
VI Diskussion der Gleichungen,Spezialfälle

VII Das vollständige System der Gleichungen

VIII Numerische Lösungen

IX Tabellen und Abbildungen

X Anhänge



"Nous avons vu des astres
Et des flots;nous avons vu des sables aussi;
Et,malgré bien des chocs et d'imprévus désastres,
Nous nous sommes souvent ennuyés,comme ici.

La gloire du soleil sur la mer violette,
La gloire des cités dans le soleil couchant,
Allumaient dans nos coeurs une ardeur inquiète
De plonger dans un ciel au reflet alléchant.

Les plus riches cités,les plus grands paysages,
Jamais ne contenaient l'attrait mystérieux
De ceux que le hasard fait avec les nuages.
Et toujours le désir nous rendait soucieux!

I Einleitung und Zusammenfassung

Seit längerer Zeit beschäftigen sich Astronomen mit der Frage, wie ein schwarzes Loch auf die diffuse Materie der Umgebung einwirkt. Neben dem rein theoretischen Interesse an diesem Problem hoffte man, Modelle für eine Reihe von Phänomenen zu finden, die in den vergangenen Jahrzehnten entdeckt wurden, wie quasistellare Objekte, aktive Galaxien oder Röntgenquellen [1].

Man kann zunächst an isolierte schwarze Löcher denken, die sich mit der kleinen Dichte der interstellaren Materie ($\rho \approx 10^{-24}$ g/cm^3) begnügen müssen, dann an schwarze Löcher in Gasnebeln, in Zentren von Kugelsternhaufen oder Galaxien. Sind schwarze Löcher Partner in einem engen Doppelsternsystem, so können sie reichlich Materie aus der Atmosphäre des gewöhnlichen Begleiters beziehen, und zuletzt kann man die Möglichkeit der Existenz von schwarzen Löchern in Sternen erwägen. In jedem Fall wird die Materie der Umgebung vom schwarzen Loch teilweise verschluckt werden und dabei vorher einen Teil ihrer potentiellen Energie in Leuchtkraft umwandeln. Deshalb ist Akkretion - also der Einfall von Materie - der wichtigste Prozeß, schwarze Löcher zu identifizieren, neben der Möglichkeit, sie als Partner in einem Doppelsternsystem nachzuweisen. (Das Licht des sichtbaren Begleiters würde in diesem Fall charakteristische Doppler- und Gravitationsrotverschiebungen aufweisen.)

In Abhängigkeit vom Gesamtdrehimpuls der umgebenden Materie lassen sich im wesentlichen zwei Arten der Akkretion unterscheiden: Einmal die sphärisch-symmetrische Akkretion, zum anderen die Scheibenakkretion. Bei letzter wird der Drehimpuls, der nicht senkrecht zur Symmetrieachse ist, dissipiert, so daß eine dünne Scheibe entsteht, in der die Materie etwa mit der jeweiligen Keplergeschwindigkeit differentiell rotiert. Durch innere Reibung des Gases, Turbulenz und magnetische Felder kann Drehimpuls nach außen transportiert werden, die Teilchen sinken dadurch auf Spiralbahnen in die inneren Bereiche der Scheibe ab und können

akkretiert werden. (Die letzte stabile Kreisbahn um ein nichtrotierendes schwarzes Loch liegt bei $r = 3\ r_s$, wobei r_s der Schwarzschildradius ist.) Die Rate, mit der Materie verschluckt wird, hängt also von der Effektivität des Drehimpulstransportes ab. Man glaubt, daß die in den inneren Teilen der Scheibe entstehende Strahlung, die im Röntgenbereich emittiert werden kann [2,3,4], einen großen Teil der einfallenden Materie wegblasen kann, möglicherweise senkrecht zur Rotationsachse der Scheibe, wenn der Massenfluß einen bestimmten, kritischen Wert überschreitet [5,6,7,8].

Sphärisch-symmetrische Akkretion kann auftreten, wenn der Gesamtdrehimpuls der Materie zu klein ist, um die Bildung einer Scheibe zu ermöglichen oder eine vorhandene Scheibe im Innern von der durch die Materie erzeugten Strahlung aufgeblasen wird. (Es genügt zu verlangen, daß der Drehimpuls pro Gramm akkretierter Materie kleiner als $\sqrt{3} \cdot \left(\frac{2GM}{c^2}\right) \cdot c$ ist. (Illarionov und Sunyaev 1975, [5]). Dies ist gewöhnlich auch dann erfüllt, wenn in Doppelsternen der Massentransfer durch Sternwind verursacht wird [22].) Die Materie fällt in diesem Modell radial nach innen, wobei sie sich aber mit allen ihr zur Verfügung stehenden Mitteln widersetzt: Jeder Energieform - z.B. thermischen, magnetischen, turbulenten - entspricht ein Druck, der mit der Kompression anwächst und der Gravitation entgegenwirkt. Ebenso bremst die Leuchtkraft, die durch die Umwandlung von potentieller Energie entsteht, die nachfallende Materie. Der Wert, bei dem der Strahlungsdruck gerade die Gravitationsanziehung kompensiert, heißt Eddingtonleuchtkraft (L_E). Ist die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie hauptsächlich durch Streuung von Photonen an freien Elektronen gegeben, so beträgt $L_E = 1{,}12 \cdot 10^{38}\ M$ erg/sec, wobei M die Masse des schwarzen Lochs in Einheiten der Sonnenmasse ist.

Man kann bei sphärisch-symmetrischer Akkretion zwei Situationen betrachten: Einmal ist der Materiestrom überall

so dünn, daß die Strahlung praktisch ungehindert ins Unendliche entweichen kann. Dies ist der Fall der optisch-dünnen Akkretion, der Massenfluß $\dot{M}$ wird dann als unterkritisch bezeichnet. Bei überkritischer Akkretion ist $\dot{M}$ größer als L_E/c^2. Bei solchen Akkretionsraten existiert ein Radius r_o, bei dem die Materie ins thermodynamische Gleichgewicht mit der Strahlung kommt und die Strahlung sich durch Diffusion ausbreitet. In diesem Bereich ist die Materie optisch dick und transportiert den größten Teil der Strahlungsenergie mit.

Die Untersuchung der optisch dicken Region bei überkritischer, sphärisch-symmetrischer Akkretion in ein nichtrotierendes, neutrales schwarzes Loch von 1 bis 10^3 Sonnenmassen ist das Ziel dieser Arbeit. Dabei beschränken wir uns auf eine zeitunabhängige Strömung und behandeln den Außenbereich, in dem die Strahlung noch fast ungehindert entweichen kann, näherungsweise. Das Hauptinteresse gilt der Frage, wie groß der sich einstellende Massenfluß $\dot{M}$ und die in der optisch dichten Region erzeugte Leuchtkraft ist.

Um einen überkritischen Massenfluß zu erhalten, muß die Anzahldichte der Materie in großer Entfernung vom schwarzen Loch größer als 10^6 Teilchen pro cm^3 sein. Hier soll der Fall untersucht werden, daß das schwarze Loch in einer HII Region eingebettet ist, die aus ionisiertem Wasserstoff besteht und von heißen Sternen der Umgebung auf einer Temperatur von 10^4 ^oK gehalten wird. Der Dichteverlauf in der Strömung ist dann allein durch die Materieströmung selbst und den Strahlungsfluß gegeben. Deshalb können die Betrachtungen nicht auf ein schwarzes Loch in einem Stern übertragen werden, bei dem auf jeden Fall der Dichteverlauf durch den Sternaufbau (Kernreaktion, Turbulenz) mitbestimmt sein würde.

Nachdem (in II) einige allgemeine Anmerkungen zu Akkretionsvorgängen in schwarzen Löchern gemacht werden, wird (in III) gezeigt, daß die Akkretionsrate im optisch-dünnen Massenbereich der Strömung bestimmt wird und die Materie dort als isotherm fallend

angenommen werden kann. Da der optisch dicke Bereich bis an den Schwarzschildhorizont reicht, ist es erforderlich, Materie und Strahlung in dieser Region relativistisch zu beschreiben. Diese Gleichungen werden in IV und V abgeleitet. Für die relativistische Fouriergleichung wurde eine neue Ableitung gegeben, die die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärmefronten bei Strahlungsdiffusion berücksichtigt. Bei der Aufstellung der hydrodynamischen Gleichungen für die Materie wird angenommen, daß die Strömung nicht turbulent ist und keine Magnetfelder besitzt (siehe z.B. [21,22]). In VI und VII werden die Gleichungen allgemein untersucht; in Kapitel VIII die numerischen Lösungen diskutiert.

Es zeigt sich, daß die Gleichungen neben der gewöhnlichen Singularität hydrodynamischer Gleichungen, die an der Stelle auftritt, wo die Strömungsgeschwindigkeit der Materie gleich der Schallgeschwindigkeit ist, eine zweite Singularität besitzen, deren Ursache die Strahlungsdiffusion ist. Diese Singularität liegt bei etwa drei Schwarzschildradien, so daß sie von der Strömung durchquert werden muß. An dieser Stelle wird die Geschwindigkeit der Materie (bezüglich eines im Schwarzschildsystem fixierten Beobachters) größer als die Geschwindigkeit, die durch die Ausbreitung der Wärmefronten aufgrund der Strahlungsdiffusion gegeben ist. Die Forderung, daß die Materie stationär in das schwarze Loch fällt, also diesen singulären Punkt stationär durchläuft, führt zur Festlegung der Leuchtkraft in Abhängigkeit von der Akkretionsrate $\dot{M}$ und der Masse M des schwarzen Lochs.

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist, daß bei stationärer, radialsymmetrischer Akkretion nur kleine Leuchtkräfte - verglichen mit der Eddingtonleuchtkraft L_E - möglich sind. Das gilt zunächst für die Akkretion aus einer HII-Region, es gilt erst recht für die Akkretion aus einer kälteren HI-Region.

Die spektrale Verteilung der Strahlung entspricht etwa der eines schwarzen Körpers mit $T = 10^4$ °K. Wegen der kleinen Leuchtkräfte (für $M = 10\ M_\odot$ und $n = 7 \cdot 10^6$ Teilchen pro cm^3 erhält man $L \approx 4 \cdot 10^{-6} L_E = 5 \cdot 10^{33}$ erg/sec) fällt die Materie fast frei in das schwarze Loch, sie schleppt dabei den größten Teil der Strahlung mit sich über den Schwarzschildhorizont. Die Temperatur wächst in der optisch dicken Region ungefähr wie $r^{-0,5}$, so daß die maximalen beim Schwarzschildradius erreichten Temperaturen (für $M = 10^3\ M_\odot$) bei 10^7 °K liegen. Dabei bleibt die Dichte kleiner als 10^{-4} g/cm^3, so daß die Vernachlässigung der Energieerzeugung durch nukleare Prozesse gegenüber der durch 'p-dV'-Arbeit erzeugten gerechtfertigt ist.

Zum Abschluß soll noch ein kurzer Überblick über andere Arbeiten zum Akkretionsproblem gegeben werden. Akkretionsvorgänge auf gewöhnliche Sterne wurden zum erstenmal von Hoyle und Lyttleton [9,10,11] und Bondi und Hoyle [12] untersucht. Es zeigte sich, daß die damit verbundene Energiefreisetzung klein ist gegen jene durch nukleare Prozesse im Sterninnern. Dies hängt einerseits mit dem geringen Gravitationspotential ($\frac{GM}{r} \simeq 10^{-6}\ c^2$) an der Oberfläche gewöhnlicher Sterne zusammen, andererseits mit den kleinen Dichten der sie umgebenden Materie. Bei schwarzen Löchern und Neutronensternen ist dagegen $\frac{GM}{r} \geq 0,1\ c^2$, man kann daher erwarten, daß die durch Akkretion entstehende Leuchtkraft ausreicht, um solche Objekte nachzuweisen [1]. Untersuchungen darüber wurden erstmals von Zel'dovich [13] und Salpeter [14] angestellt, Akkretion auf supermassive schwarze Löcher ($M \simeq 10^7\ M_\odot$) wurde von Lynden-Bell [15] diskutiert. Für ein schwarzes Loch mit $M = 1\ M_\odot$ in einer dünnen HII-Region ($n_\infty = 1\ cm^{-3}$) erhält man bei sphärisch-symmetrischer Akkretion eine Leuchtkraft $L \approx 2 \cdot 10^{21}$ erg s^{-1}, also $L/L_\odot \approx 10^{-12}$ [16], die durch Bremsstrahlung entsteht. Nimmt man zusätzlich an, daß Magnetfelder in der Materie vorhanden sind, die während des Einfalls dissipiert werden müssen, so wird unter denselben

äußeren Bedingungen ($T_\infty = 10^4$ °K, $n_\infty = 1$ cm^{-3}) aufgrund von Synchrotron-Strahlung die Leuchtkraft $L = 5 \cdot 10^{25}$ erg s^{-1} abgestrahlt [17] . Die Materie verhält sich bei diesen Dichten überall optisch dünn, im ersten Fall könnten ihre spektralen Eigenschaften denen eines bestimmten Typus von DC-Zwergen ähnlich sein [18,19,20].

Optisch dichte Akkretion auf Neutronensterne wurde u.a. von Maraschi, Reina und Treves [23], Shapiro und Salpeter [24] und Vitello [25] untersucht (außerdem von De Gregoria [26] bei weißen Zwergen), jeweils unter speziellen Annahmen. In Kaptiel II wird gezeigt, warum die Ergebnisse nicht auf schwarze Löcher übertragen werden können.

Optisch dichte Akkretion in ein schwarzes Loch wurde für ein spezielles Modell ($M = 1\ M_\odot$, $n_\infty = 10^8$ cm^{-3}, $T_\infty = 10^4$ °K) von Tamazawa et al. [27] diskutiert. Sie beschrieben den Strahlungstransport mit Hilfe eines variablen Eddingtonfaktors, ihre Ergebnisse stimmen genau mit denen in dieser Arbeit erhaltenen überein. Weiterhin widmeten sich P. Kafka und Peter Mészáros [18] und M.C. Begelman [29] diesem Problem. P. Kafka und P. Mészáros verwendeten nichtrelativistische Gleichungen und vernachlässigten thermische Energie und thermischen Druck der Materie gegenüber entsprechenden Größen der Strahlung. Sie erhielten nur sogenannte 'settling-solutions', d.h. Lösungen, bei denen die Geschwindigkeit der Materie vor dem Schwarzschildhorizont gegen null geht. Da die Materie den Schwarzschildhorizont aber mit Überschallgeschwindigkeit durchqueren muß (s. Kap.II), stellen diese Lösungen keine realen Akkretionsprozesse in ein schwarzes Loch dar. M.C. Begelman benützte ebenfalls nichtrelativistische Gleichungen und betrachtete die Materieströmung nur bei einem Radius, der wesentlich größer als der Schwarzschildradius ist. Unter der Annahme, daß an bestimmten Radien durch andere Prozesse als thermische (Turbulenz, Dissipation von Magnetfeldern) Energie freigesetzt wird, kam er zu dem Ergebnis, daß die

Leuchtkraft im Unendlichen nicht den Wert $0{,}6 \cdot L_E$ überschreiten kann. Obwohl dieses Resultat den in der vorliegenden Arbeit erhaltenen Ergebnissen nicht widerspricht, ist zu bemerken, daß bei einer selbstkonsistenten Behandlung die Materieströmung bis zum Schwarzschildradius beschrieben werden muß. Die relativistischen Gleichungen werden aber in der Nähe des Schwarzschildradius singulär. Die Singularität kommt einer inneren Randbedingung gleich, die, wie in dieser Arbeit gezeigt wird, nur für sehr kleine Leuchtkräfte erfüllt werden kann. Auf die zuletzt genannten Arbeiten wird nochmals in Kapitel VIII eingegangen.

II Grundlegende Eigenschaften der sphärisch-symmetrischen Akkretion in ein schwarzes Loch

Zunächst soll die Frage diskutiert werden, weshalb man erwarten kann, durch die Untersuchung von zeitunabhängigen Strömungen, die sich bei gegebenen Randwerten in großer Entfernung vom schwarzen Loch einstellen - eventuell nach einem zeitabhängigen Einschwingvorgang - den resultierenden Massenfluß und die resultierende Leuchtkraft bestimmen zu können. Dazu ist es notwendig, an die grundlegende Arbeit von H. Bondi [30] zu erinnern:

Bondi untersuchte 1951 sphärisch symmetrische, zeitunabhängige Akkretion auf gewöhnliche Objekte, ohne Strahlungstransport zu berücksichtigen. Er benutzte dazu die gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen:

$$4\pi r^2 \rho v = \dot{M} = \text{const.}; \tag{II.1}$$

Baryonenerhaltung (Kontinuitätsgleichung)

M : Massenfluß = Akkretionsrate

v : Geschwindigkeit der Materie

r : Radius

$$\frac{d(v^2)}{dr} = -\frac{G M}{r^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}; \tag{II.2}$$

Impulserhaltung

p : thermischer Druck

M : Masse des Sternes

G : Gravitationskonstante

$$\frac{d\epsilon}{dr} - \frac{\epsilon + p}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = n T \frac{ds}{dr}; \tag{II.3}$$

1. Hauptsatz

ϵ : thermische Energie

s : Entropie/Baryon

n : Anzahldichte

Die letzte Gleichung löste Bondi unter der Annahme, daß $\frac{ds}{dr} = 0$ gilt. Wählt man eine Zustandsgleichung $f(T, \rho, p) = 0$, so erhält man $p \propto \rho^{\gamma}$, wobei γ der Adiabatenindex ist. Damit kann man Gleichung (2) integrieren und erhält die Bernoulligleichung

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \gamma \frac{p}{\rho} - \frac{GM}{r} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \qquad \text{(II.4)}$$

$\gamma \cdot \frac{p}{\rho} = a^2$ ist gleich dem Quadrat der adiabatischen Schallgeschwindigkeit; p_∞ , ρ_∞ sind Integrationskonstanten.

Verlangt man, daß die Materie einen Schallpunkt durchläuft, d.h. von einer Unterschall- in eine Überschallströmung übergeht, so erhält man, wie Bondi durch die Untersuchung der integrierten Gleichungen (1) und (4) zeigen konnte, bei gegebenem Adiabatenindex $\gamma = 5/3$ und Werten für ρ_∞ und a_∞ einen eindeutig bestimmten Massenfluß $\dot{M}$.

Der mathematische Grund für dieses Verhalten der Lösungen ist der singuläre Punkt, welchen die Gleichungen (1) (2) und (3) besitzen. Wenn wir das System in der Form

$$A \begin{pmatrix} v' \\ T' \end{pmatrix} = b \qquad \text{(II.5)}$$

abkürzen, wobei A eine Matrix ist und b ein Vektor mit von r, T und v abhängigen Koeffizienten, so liegt der singuläre oder kritische Punkt r_* an jener Stelle, bei der det (A) = 0 gilt, das System also nicht invertierbar ist. Man kann leicht zeigen, daß an dieser Stelle v = a gilt, d.h. die Geschwindigkeit der Materie gleich der Schallgeschwindigkeit ist. Dadurch erhält man für physikalische Lösungen ($u' \neq \infty$, $T' \neq \infty$) eine zusätzliche Bedingung: Invertiert man nämlich (5)

$$\begin{pmatrix} u' \\ T' \end{pmatrix} = (\det(A))^{-1} \cdot A^{\text{adjungiert}} \cdot b \qquad \text{(II.6)}$$

so müssen bei r_* beide Komponenten des Vektors $A^{\text{adjungiert}}\, b$

null sein. Es genügt zu fordern, daß nur eine von ihnen null ist, aus mathematischen Gründen verschwindet dann auch die andere.

Physikalisch betrachtet bedeutet diese Forderung, daß der Übergang vom Unter- in den Überschallbereich stetig vor sich geht, also die Lösung im gesamten Radiusbereich keine Singularität besitzt. Dies legt den Massenfluß $\dot{M}$ fest. Die so gefundene, zeitunabhängige Lösung kann sich tatsächlich dadurch einstellen, daß sich zunächst, wenn der Massenfluß noch nicht den richtigen Wert hat, bei r_* eine Schockwelle ausbildet, die in den Unterschallbereich zurückläuft ($r > r_*$) und allmählich die äußeren Parameter so einreguliert, bis die zusätzliche Bedingung bei r_* erfüllt ist und die Schockwelle verschwindet.

Wir werden sehen, daß auch in unserem Problem der Massenfluß $\dot{M}$ durch Bondi's Betrachtung festgelegt wird, da diese in einem Bereich anzuwenden sind, in denen Effekte der Strahlung und relativistischen Effekte vernachlässigbar oder leicht in die Behandlung einfügbar sind.

Es stellt sich nun die Frage, ob sich auch die Leuchtkraft in großer Entfernung vom schwarzen Loch durch Untersuchung der zeitunabhängigen Gleichungen festlegen läßt. Die Leuchtkraft wird - im Gegensatz zum Massenfluß - in dem Bereich der Strömung bestimmt, in dem diese optisch dick wird, also lokales thermodynamisches Gleichgewicht gilt. Hier zeigt sich ein prinzipieller Unterschied zwischen der stationären Akkretion auf schwarze Löcher und der auf gewöhnliche kompakte Objekte, wie z.B. Neutronensterne: Bei kompakten Objekten ohne Horizont ist mit der Akkretionsrate bereits die Leuchtkraft im 'Unendlichen' gegeben: Bei zeitunabhängiger Akkretion muß man verlangen, daß sich die Oberfläche des Sterns nicht durch den Aufprall der Materie ständig weiter aufheizt. Deshalb muß die gesamte potentielle Energie der Materie abgestrahlt werden, zum

Teil während ihres Fallens, zum Teil erst nach dem Aufprall. Bei einem schwarzen Loch dagegen kann auch Strahlungsenergie 'geschluckt', d.h. von der Materie in den Bereich jenseits des Schwarzschildradius getragen werden. Die gesamte Strahlungsenergie, die in das 'Unendliche' gelangt, muß während des Einfalls der Materie abgestrahlt worden sein. Ein direkter Zusammenhang zwischen Massenfluß und Leuchtkraft besteht hier also nicht.

Es gibt jedoch noch einen zweiten wichtigen Unterschied zwischen Akkretion auf gewöhnliche Objekte und schwarze Löcher. Die Geschwindigkeit, mit der die Materie auf die harte Oberfläche eines Neutronensterns oder weißen Zwerges trifft, kann beliebig sein, insbesondere kleiner als die Schallgeschwindigkeit. Der Schwarzschildradius bei einem schwarzen Loch dagegen muß in jedem Fall mit Überschallgeschwindigkeit durchquert werden, bezogen auf einen Beobachter, der sich unmittelbar vor dem Horizont in Ruhe zum schwarzen Loch befindet. (Wir werden ihn einen 'stationären Beobachter' nennen und die von ihm gemessene Geschwindigkeit der Materie 'stationäre Geschwindigkeit'.) Dies folgt direkt aus den relativistischen Gleichungen, ist aber auch plausibel, wenn man bedenkt, daß es andernfalls möglich wäre, mit Hilfe von Schallwellen Information aus dem schwarzen Loch nach außen zu übertragen. So sieht man sofort ein, daß die stationäre Geschwindigkeit der Materie größer sein muß als jede Geschwindigkeit von Ausbreitungsvorgängen, die in dem Gas stattfinden; z.B. die Geschwindigkeit, mit der sich die Wärmefronten im Gas fortpflanzen. Diese Geschwindigkeit ist, wenn man von der üblichen relativistischen Fourier-Gleichung für den Strahlungstransport ausgeht , wie in der nichtrelativistischen Physik unendlich groß, (d.h. die Wärmefronten breiten sich instantan aus), da auch die relativistische Fourier-Gleichung - wie sie von C. Eckart [31] angegeben wurde - auf eine parabolische Differentialgleichung für die Wärmeausbreitung führt. In der vorliegenden Arbeit wird der Ableitung

der relativistischen Fourier-Gleichung daher besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Es wird gezeigt, daß Eckart's Gleichung nicht konsistent ist mit der Theorie des relativistischen Strahlungstransports, wie sie von Lindquist [32] formuliert wurde und eine verbesserte Gleichung angegeben, welche direkt aus der Theorie des Strahlungstransports abgeleitet werden kann. Die Tatsache, daß die stationäre Geschwindigkeit der Materie größer als jede Ausbreitungsgeschwindigkeit im Gas sein muß, wird dann durch eine kritische Bedingung ähnlich wie bei der 'Bondi-Akkretion' die Leuchtkraft festlegen.

III. Verhalten der Materie in großer Entfernung vom schwarzen Loch

1. Außenbereich: Wir nehmen an, daß das schwarze Loch in eine HII-Region mit Teilchendichten zwischen 10^6-10^9 Ionen pro cm^3 und einer Temperatur von 10^4 ^oK eingebettet ist. Die Ausdehnung der Wolke sei einerseits so groß, daß genügend Material für stationäre Akkretion in das schwarze Loch vorhanden ist, andererseits aber die Temperaturstrahlung der Materie praktisch ungehindert entweichen kann. Zahlenwerte werden bei der Diskussion der Modelle gegeben.

Da das Plasma die Tendenz hat, sich durch Bremsstrahlung und Rekombination der Wasserstoffionen abzukühlen, sind zur Aufrechterhaltung der Temperatur heiße Sterne notwendig, die genügend kurzwellige Strahlung aussenden, um durch Photoionisation den Energieverlust des Gases auszugleichen. Die von der einfallenden Materie selbst erzeugte Leuchtkraft enthält nicht genügend hochenergetische Photonen, um die Plasmawolke ionisiert zu halten. Ebenso genügt sie nicht, um das Gas durch frei-frei-Übergänge zu heizen. Das schwarze Loch kann aber eventuell mithelfen, das Gas, welches bestrebt ist, sich aufgrund seiner Temperatur auszudehnen, zusammenzuhalten.

Den Radius, bei dem die Gravitationsanziehung auf die Materie wirksam wird, bezeichnet man als Akkretionsradius r_A. Bei ihm ist die thermische Geschwindigkeit der Protonen gleich ihrer Entweichgeschwindigkeit oder, anders ausgedrückt, ihrer Freifallgeschwindigkeit aus dem Unendlichen.

Aus

$$\frac{1}{2} m_p v_{th}^2 = \frac{3}{2} k T$$

und

$$\frac{1}{2} m_p v_{ff}^2 = \frac{GMm}{r_A}$$

(M : Masse des schwarzen Loches
G : Gravitationskonstante
m_p : Protonenmasse
k : Boltzmannkonstante
v_{th}: thermische Geschwindigkeit der Protonen
v_{ff}: Fallgeschwindigkeit der Protonen)

erhält man also:

$$r_A = \frac{2\,G\,M\,m_p}{3\,k\,T} = 0.53\cdot 10^{14}\,\frac{M}{M_\odot}\,\frac{10^4}{T\,[^oK]}\ \text{cm}$$

$$= 1.17\cdot 1o^{-5}\,\frac{M}{M_\odot}\,\frac{10^4}{T\,[^oK]}\ \text{pc}$$

($M_\odot$: Sonnenmasse)

In [1] wird r_A als jene Entfernung definiert, bei der die adiabatische Schallgeschwindigkeit a der Materie gleich v_{ff} ist; mit

$$\frac{1}{2}\,a^2 = \frac{G\,M}{r_A}$$

und

$$a^2 = \left(\frac{dp_{th}}{d\varrho}\right)_{ad} = \frac{5}{3}\,\frac{k\,T}{m_p}$$

(p_{th}: thermischer Gasdruck)
lautet r_A dann:

$$r_A = \frac{6}{5}\,\frac{G\,M\,m_p}{3kT}\ .$$

Beim Akkretionsradius geht also die Materie von einer Unterschall- in eine Überschallströmung über. Daraus läßt sich gemäß Bondi's Argumentation bei gegebener Dichte und Temperatur im 'Unendlichen' ($r>r_A$) die Akkretionsrate $\dot{M}\ \frac{gr}{sec}$ berechnen, wobei der genaue Wert etwas vom Temperaturverlauf in der Strömung abhängt.

In großem Abstand vom schwarzen Loch kann man das Gas nichtrelativistisch beschreiben. Im 1. Abschnitt des Kapitels IV wird gezeigt, daß es hydrodynamischen Gleichungen genügt. Daher gilt die übliche Kontinuitätsgleichung

$$4\pi r^2 v \varrho = \dot{M} \qquad \text{(III.1)}$$

und Impulserhaltung:

$$\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{L}{L_E}\right) - \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr} \quad . \qquad \text{(III.2)}^{*)}$$

Hier geht die Leuchtkraft L ein, die von der Materie während ihres Einfalls radial nach außen abgestrahlt wird und durch Strahlungsdruck die Materie abbremst. Da wir ein vollständig ionisiertes Plasma voraussetzen, ist die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie hauptsächlich durch Streuung der Photonen an freien Elektronen gegeben, also durch Thomsonstreuung. (Es gilt immer: $h\nu << m_e \cdot c^2$) Aus Gleichung (2) geht hervor, daß die Leuchtkraft bei sphärisch-symmetrischer, zeitunabhängiger Akkretion immer kleiner als die sogenannte Eddingtonleuchtkraft L_E sein muß. Dieser Grenzwert, bei dem die Gravitationsanziehung durch den Strahlungsdruck gerade kompensiert wird, wurde 1926 von Eddington abgeleitet. Sein Wert für Thomsonstreuung beträgt:

$$L_E = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_{Th}} = 1.26 \cdot 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ erg s}^{-1} \quad .$$

($\sigma_{Th} = 6{,}65\ 10^{-25}$ cm^2: Wirkungsquerschnitt für Thomsonstreuung)

---

*) Diese Gleichung wird später für den Radiusbereich, in dem lokales thermodynamisches Gleichgewicht gilt, abgeleitet. Sie gilt jedoch auch im optisch dünnen Bereich und kann aus der Strahlungstransporttheorie hergeleitet werden (s. z.B. [33]).

(Die Thomsonstreuung übt zwar nur auf Elektronen die Kraft

$$\sigma_{Th} \frac{L}{4\pi r^2 c} \qquad \left(\frac{L}{4\pi r^2} : \text{Strahlungsfluß}\right)$$

aus, diese können aber den Druck durch elektrische Felder auf die Protonen übertragen, so daß die Gesamtkraft auf ein Proton durch

$$F_{tot} = \frac{\sigma_{Th} L}{4\pi r^2 c} - \frac{G M m_p}{r^2}$$

gegeben ist. Aus $F_{tot} = 0$ folgt der obige Grenzwert.)

Nehmen wir an, daß der Hauptanteil der Leuchtkraft dort erzeugt wird, wo sich die Strahlung im thermischen Gleichgewicht mit der Materie befindet, also im inneren Bereich der Strömung, so ist L konstant und man muß in Bondi's Rechnung die Masse M nur durch eine effektive Masse $M\,(1-L/L_E)$ ersetzen. Die Energiebilanz für das Plasma lautet:

$$v \frac{d}{dr}(E_{th}) + p_{th} v \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 4\pi \bar{K} (J - S). \qquad \text{(III.3)}$$

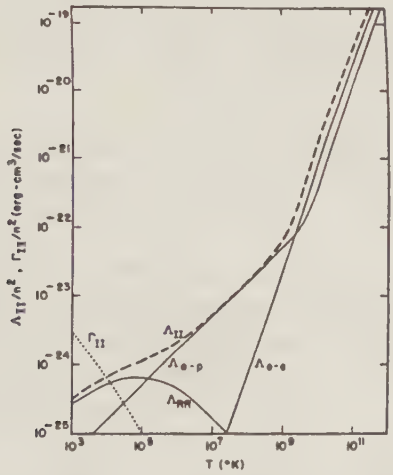
Dabei ist E_{th} die thermische Energie pro Gramm Materie, $\bar{K}$ der intensitätsgemittelte Massenabsorptionskoeffizient, J bzw. S die frequenzgemittelte Intensität bzw. Quellenfunktion. Der Term $4\pi\bar{K}$ (J-S) berücksichtigt die Heizung und Kühlung des Gases. Da gebunden-gebunden Übergänge vernachlässigt werden können, gilt: (s. [27] und dort zitierte Referenzen)

$$(J - S) \approx 3.8\, n\, T^{-7/2} \frac{L}{16\pi^2 r^2} + 5\cdot 10^2\, n\, T^{-1} - 4.3\, n\, T^{-1/2} - 6.8\cdot 10^4 n\, T^{1/2} \text{ erg s}^{-1}\text{gr}^{-1}$$

Der erste Term gibt die Energie, die die Materie durch frei-frei Absorptionen gewinnt, wieder. Er ist in allen betrachteten Modellen vernachlässigbar gegenüber dem 2. Term der die Ionisationsheizung durch UV-Strahlung heißer Sterne

berücksichtigt. Dabei wird der numerische Faktor gerade so adjustiert, daß die Gleichgewichtstemperatur 10^4 °K ist. Endlich beschreiben der dritte und vierte Term die Energieverluste durch frei-frei bzw. frei-gebunden Emissionen.

Figur (1), die einer Arbeit von Shapiro [16] entnommen ist, zeigt den Verlauf dieser Heizungs- und Kühlungsfunktionen.



(Fig.1)

Die gestrichelte Kurve gibt die gesamte Kühlungsrate pro Einheitsvolumen (Λ_{II}/n^2) wieder, die übrigen Kurven die Kühlungsrate für Rekombination (Λ_{RR}), Elektron-Proton- (Λ_{e-p}) und Elektron-Elektronbremsstrahlung(Λ_{e-e}). Die gepunktete Kurve zeigt Γ_{II}/n^2, wobei Γ_{II} die Heizungsrate pro Einheitsvolumen aufgrund der Absorption von ultravioletten Photonen des ionisierenden Sternes ist. Die Sternfarbentemperatur ist dabei als $1{,}06 \cdot 10^4$ °K angenommen worden; das Gas als vollständig ionisiert. n ist die Ionenanzahldichte der HII-Region. Der von der Kompression herrührende pdV Heizungsterm läßt sich folgendermaßen abschätzen:

$$p\,v\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -2\,n\,k\,T\,v\,\frac{1}{\rho^2}\,\frac{d\rho}{dr}$$

Setzt man hier für v die freie Fallgeschwindigkeit, also

$$v \approx \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}}$$

und daher

$$\varsigma = \frac{\dot{M}}{4\sqrt{2GM}\, r^{3/2}\pi} \quad , \quad \frac{d\varsigma}{dr} = -\frac{3}{2}\,\frac{\varsigma}{r} \quad ,$$

so folgt

$$p\,v\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\varsigma}\right) = \frac{3\,n\,k\,T\sqrt{2\,G\,M}}{\varsigma}\,\frac{1}{r^{3/2}} =$$

$$= \frac{4\pi\,n\,T}{M}\,(6\,G\,M\,k)$$

$$= 4\pi\,n\,\frac{T}{\mu}\,8\cdot 10^{-7} \quad ,$$

wobei die dimensionslose Größe $\mu \gg 1$ der Massenfluß in Einheiten von L_E/c^2 ist. Man kann die pdV Heizung daher gegenüber den anderen Termen vernachlässigen, solange die emittierte Strahlung entweichen kann. Vergleicht man den Energieverlust der Materie durch frei-frei-Emission (der andere Kühlungsterm ist bei 10^4 °K von derselben Größenordnung, nimmt aber im Gegensatz zur frei--frei-Kühlung mit wachsender Temperatur sehr schnell ab) mit der thermischen Energie eines Gramms Materie, so ist durch

$$t_k = \frac{E_{th}}{\epsilon_{ff}/4\pi} = \frac{3kT}{m_p}\,(6.8\cdot 10^{-4}\; n\; T^{1/2})^{-1}$$

$$= 3.6\cdot 10^5\,\left(\frac{T\,[^oK]}{10^4}\right)^{1/2}\,\left(\frac{n\,[cm^{-3}]}{10^8}\right)\,s$$

eine typische Kühlungszeit gegeben.
Die Zeit, die die Materie benötigt, um vom Akkretionsradius bis zum Schwarzschildradius zu fallen, läßt sich durch

$$t_{ff} \approx \frac{r_A}{a_\infty} \approx 10^{8}\cdot\left(\frac{T\,[^oK]}{10^4}\right)^{3/2}\,\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\,s$$

abschätzen.

Da $t_{ff} \gg t_k$ wird das Gas in den Schichten, die optisch dünn sind gegenüber Thomson-Streuung - so daß die Photonen

auf dem kürzesten Weg entfliehen können, ohne durch frei-frei-Übergänge ihre Energie wieder zu verlieren - sehr effektiv gekühlt. Das bedeutet, daß das Gas im optisch dünnen Bereich isotherm fällt, da von den heißen Sternen, wie vorausgesetzt, genügend heiße Photonen vorhanden sind, um das Gas im Gleichgewicht bei 10^4 °K zu halten. Nach Bondi erhält man damit für den dimensionslosen Massenfluß μ den Wert

$$\mu = 1.38 \cdot 10^2 \; \frac{n\,[\mathrm{cm}^{-3}]}{10^8} \frac{M}{M_\odot} \frac{T\,[^\circ\mathrm{K}]}{10^4} \left(1 - \frac{L}{L_E}\right)^2 . \qquad \text{(III.4)}$$

Da diese Gleichung für isothermen Massenfluß wesentlich einfacher gewonnen werden kann als durch das allgemeinere Verfahren Bondi's, wird sie in Anhang A nochmals abgeleitet.

2. Es empfiehlt sich, alle Größen auf das Vielfache der Eddingtonleuchtkraft L_E, den Schwarzschildradius r_s und der Lichtgeschwindigkeit c zu beziehen (s. [28]). Damit ergibt sich die folgende Tabelle:

Radius r:

$$r = \tilde{r} \cdot r_s ; \qquad r_s = 3 \cdot 10^5 \; \frac{M}{M_\odot} \; \mathrm{cm}$$

Geschwindigkeit v:

$$v = u \cdot c ; \qquad c = 3 \cdot 10^{10} \; \mathrm{cm/s}$$

Leuchtkraft L:

$$L = \tilde{L} \cdot L_E ; \qquad L_E = 1{,}26 \cdot 10^{38} \; \frac{M}{M_\odot} \; \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{sec}}$$

Massenfluß $\dot{M}$:

$$\dot{M} = \mu \cdot \frac{L_E}{c^2} ; \qquad \frac{L_E}{c^2} = 1{,}39 \cdot 10^{17} \; \frac{M}{M_\odot} \; \frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{sec}}$$

Dichte ϱ :

$$\varrho = \tilde{\varrho} \; \frac{L_E}{r_s^2 \, c^3} ; \qquad \frac{L_E}{r_s^2 \, c^3} = 5{,}36 \cdot 10^{-5} \; \frac{M}{M_\odot}^{-1} \; \frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{cm}^3}$$

Energiedichte U der Strahlung:

$$U = \tilde{U} \; \frac{L_E}{r_s^2 \, c} ; \qquad \frac{L_E}{r_s^2 \, c} = 4{,}82 \cdot 10^{-16} \; \frac{M}{M_\odot}^{-1} \; \mathrm{erg\ cm}^{-3}$$

Anzahldichte n:

$$n = \tilde{n} \; r_s^{-3} ; \qquad r_s^{-3} = 3{,}7 \cdot 10^{-17} \; \frac{M}{M_\odot}^{-3} \; \mathrm{cm}^{-3}$$

Da wir die Temperatur weiterhin in ^{o}K ausdrücken wollen, erhält man aus

$$\tilde{U} = \tilde{a}\, T^4 \qquad \text{und} \qquad U = a\, T^4$$

für die Strahlungskonstante a den Wert:

$$\tilde{a} = a\, \frac{r_S^2 c}{L_E} = 1.67 \cdot 10^{-31}\ \frac{M}{M_\odot}\ \frac{1}{{}^{o}K^4}\ .$$

Ebenso schreiben wir die Formel für thermische Energiedichte ϵ_{th} und thermischen Druck p_{th} in der Form:

$$\tilde{\epsilon}_{th} = \tilde{\chi}_1 \tilde{\rho}\, T \qquad \text{bzw.} \quad \epsilon_{th} = \chi_1 \rho\, T$$

$$\tilde{p}_{th} = \tilde{\chi}_1 \tilde{\rho}\, T \qquad \text{bzw.} \quad p_{th} = \chi_2 \rho\, T$$

Dann erhält man:

$$\tilde{\chi}_1 = \chi_1 \frac{\tilde{\epsilon}_{th}}{\epsilon_{th}} \frac{\rho}{\tilde{\rho}} = \chi_1 c^{-2}$$

$$\tilde{\chi}_2 = \chi_2 \frac{\tilde{p}_{th}}{p_{th}} \frac{\rho}{\tilde{\rho}} = \chi_2 c^{-2}\ .$$

Für ein nichtrelativistisches Gas aus Elektronen und Protonen ist

$$\chi_1 = \frac{3k}{m_p} = 2.48 \cdot 10^{8}\ \text{erg gr}^{-1}\ {}^{o}K^{-1}$$

$$\chi_2 = \frac{2k}{m_p} = 1.66 \cdot 10^{8}\ \text{erg gr}^{-1}\ {}^{o}K^{-1}\ ,$$

(k = Boltzmannkonstante)

also:

$$\tilde{\chi}_1 = 2.76 \cdot 10^{-13}\ {}^{o}K^{-1}$$

$$\tilde{\chi}_2 = 1.84 \cdot 10^{-13}\ {}^{o}K^{-1}\ .$$

Der Wert der Opazität $\kappa = \sigma_{th}/m_p$ für Thomsonstreuung an Elektronen beträgt in diesen Einheiten 2π .
Wir werden im Folgenden jedoch die Tilde über den undimensionierten Größen weglassen.

In den neuen Einheiten lautet der Akkretionsradius r_A dann

$$r_A = 0.17 \cdot 10^9 \, \frac{10^4}{T[^\circ K]} \, ,$$

und Gleichung (III.2) geht über in

$$\frac{1}{2}\,(u^2)' = \frac{L-1}{2r^2} - p_{th}' \, \rho^{-1} \qquad (\,)' \equiv \frac{d}{dr}(\,) \, . \tag{III.5}$$

5. Die Gasströmung wird für kleine Radien immer dichter, ebenso wächst die optische Tiefe der Schichten. Ab einem bestimmten Radius, den wir mit r_o bezeichnen, kommen Materie und Strahlung ins thermodynamische Gleichgewicht.

Diesen Radius bestimmten P. Kafka und P. Mészáros [28] durch die Forderung, daß die integrierte optische Tiefe der Schichten bezüglich Thomsonstreuung, τ_{th}, größer als 2 wird, also

$$\tau_{th} = \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}_0+\Delta r} \rho \kappa \, dr = \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}_0+\Delta r} \frac{\mu}{2\, r^{3/2}\sqrt{1-\lambda}} \, dr$$

$$= - \frac{\mu}{r^{1/2}\sqrt{1-\lambda}} \Bigg|_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}_0+\Delta r} \approx \frac{\mu}{\tilde{r}_0^{1/2}\sqrt{1-\lambda}} > 2 \, ,$$

$$\text{für} \quad \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}_0+\Delta r} \ll 1 \, ,$$

oder

$$\tilde{r}_0 \leq \frac{\mu^2}{4(1-\lambda)} \, . \tag{III.6}$$

(Hier wurde die Dichte mit Hilfe des reduzierten Freifallgesetzes $u^2 = (1-\lambda)/r$ (s. Gl. III.5) aus der Kontinuitätsgleichung bestimmt mit $\lambda = L_\infty$.) Die Forderung ist gleichbedeutend damit, daß die mittlere freie Weglänge ℓ eines Photons bezüglich Thomsonstreuung kleiner als der Abstand $\tilde{r}_0$ vom schwarzen Loch ist, d.h.

$$l \equiv \frac{1}{\kappa \rho} = \frac{1}{2\pi\rho} < \tilde{r}_0 \, , \tag{III.7}$$

oder auch

$$\frac{d\tau_{Th}}{dr} \cdot \tilde{r}_o > 1$$

Da aber durch Thomsonstreuung keine Energie zwischen Photonen und Elektronen übertragen wird, sondern nur Impuls - das Elektron wird als unendlich schwer gegenüber dem Photon betrachtet! - , ist P. Kafka und P. Mészáros's Bedingung nur hinreichend dafür, daß die Strahlung isotropisiert wird. In der betrachteten Temperaturregion ($\geq 10^4$ °K) findet Energieaustausch zwischen Photonen und Elektronen in erster Linie durch frei-frei-Übergänge statt. Man erhält deshalb eine bessere Näherung für r_o, wenn man die effektive optische Tiefe

$$\tau_* = \sqrt{3\,\tau_{Th}\,\tau_{ff}}$$

benutzt, wobei τ_{ff} die optische Tiefe bezüglich der frei-frei-Absorption der Strahlung ist. (Hier geht τ_{th} ein, weil der tatsächliche Weg, den ein Photon durchlaufen muß, bis es eine Schicht verläßt, durch die Thomsonstreuung vergrößert wird. Dadurch wächst die Wahrscheinlichkeit, daß es auf ein Elektron Energie überträgt (s. [34])).

Verlang man jetzt - statt $\frac{d\tau_{Th}}{dr}\tilde{r}_o > 1$ wie vorher - daß

$$\frac{d\tau_*}{dr}\hat{r}_o > 1$$

gilt, so erhält man mit

$$\frac{d\tau_{Th}}{dr} = \kappa_{Th}\,\varrho = \frac{\sigma_{Th}}{m_p}\,\varrho \quad cm^{-1}$$

und

$$\frac{d\tau_{ff}}{dr} = \kappa_{ff}\,\varrho \approx 6\cdot 10^{22}\,(\varrho\,[gr\,cm^{-3}])^2\,(T[°K])^{-7/2}\,cm^{-1}:$$

(κ_{ff} : Massenabsorptionskoeffizient für frei-frei-Übergänge, (s. z.B. [25, 37]))

$$\hat{r}_o < 1.3\cdot 10^7\,\mu^{6/5}\,(1-\lambda)^{-3/5}\,\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2/5}\,(T[°K])^{-7/5}$$

Die Dichte ϱ wurde wieder aus dem reduzierten Freifallgesetz berechnet. Da das Gas im Außenbereich isotherm fällt, kann man bei $\hat{r}_o$ $T = 10^4\ ^oK$ setzen, damit ist

$$\hat{r}_o = 0.33 \cdot 10^2\ \mu^{6/5} (1-\lambda)^{-3/5} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2/5} . \qquad \text{(III.8)}$$

$\hat{r}_o$ wächst also langsamer mit μ als $\tilde{r}_o$ und nimmt mit wachsendem M ab. Für $M = 1\ M_\odot$ und $\mu \approx 400$ stimmen $\tilde{r}_o$ und $\hat{r}_o$ überein. Die Abhängigkeit des Radius $\hat{r}_o$ von der Masse des schwarzen Loches wird verständlich, wenn man Gleichung (III.7) betrachtet. Wächst M, so wachsen auch die durch den Schwarzschildradius ausgedrückten Längenskalen, so daß eine Thomsonstreuung pro Längenskala, wie in Gl. (III.7) gefordert ist, nicht mehr ausreicht, um Materie und Strahlung ins Gleichgewicht zu bringen. (Gleichung (III.7) beschreibt eine globale Bedingung, thermodynamisches Gleichgewicht ist eine lokale Bedingung.) Daher muß $\hat{r}_o$ mit wachsender Masse abnehmen, wobei es in cm gemessen wächst wie $M^{3/5}$.

Da in dieser Arbeit der optisch dicke Bereich der Materieströmung untersucht werden soll, muß auf jeden Fall $\mu \gg 1$ sein, d.h. die Akkretion muß überkritisch sein ($\dot{M} \gg L_E/c^2$). Bei den numerischen Rechnungen für den optisch dicken Bereich ($r < \tilde{r}_o$ bzw. $r < \hat{r}_o$) wurden beide Radien benutzt und die Ergebnisse verglichen. Die Vernachlässigung der expliziten Behandlung der Übergangszone zwischen optisch tiefer und dünner Region ist dann gerechtfertigt, wenn die Leuchtkraft λ bei $\tilde{r}_o$ bzw. $\hat{r}_o$ - die ja beide von λ abhängen! -, welche durch den kritischen Punkt im optisch dicken Bereich bestimmt wird, mit jener übereinstimmt, die aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz folgt; oder, anders ausgedrückt, falls die Materie bei $\tilde{r}_o$ bzw. $\hat{r}_o$ wie ein schwarzer Körper strahlt und die Strahlungstemperatur etwa gleich $10^4\ ^oK$ ist.

4. Zum Abschluß dieses Kapitels soll die Leuchtkraft berechnet werden, die aufgrund der Kühlung durch Bremsstrahlung im optisch dünnen Bereich frei wird, wobei wir den Dichteverlauf durch den des freien Falls approximieren.
Die Kühlungsrate für frei-frei Emission war

$$\frac{\epsilon_{ff}}{4\pi} = 6.8\cdot10^{4}\ n\ T^{1/2} \qquad \text{erg gr}^{-1}\text{s}^{-1}\text{sterad}^{-1}$$

oder (vergl. Gl. (III.3))

$$\frac{dE_{th}}{dr} = 6.8\cdot10^{-4}\ \frac{n}{v}\ T^{+1/2} \qquad \text{erg gr}^{-1}\text{cm}^{-1}\text{sterad}^{-1}.$$

Mit

$$n = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v\, m_p}\ ,\quad v = \sqrt{\frac{2GM}{r}},\ \text{und}\quad T = 10^4\ {}^{o}\text{K}$$

ergibt das

$$\frac{dE_{th}}{dr} = 6.8\ 10^{-2}\ \frac{M}{8\pi GMm_p}\ \frac{1}{r}\ ,$$

also

$$\Delta E = E_{th}\Big|_{r_A}^{r_o} = 6.8\cdot10^{-2}\ \frac{M}{8\pi GMm_p}\ \ln(r)\Big|_{r_A}^{r_o}$$

$$= 6.8\cdot\frac{\dot{M}}{8\pi GMm_p}\ \ln\left(\frac{r_o}{r_A}\right)\ \text{erg gr}^{-1}\ .$$

Da

$$\frac{r_o}{r_A} \approx \frac{\mu^2}{4\ 1.7\ 10^{8}} \approx 0.15\cdot10^{-4}\ \left(\frac{\mu}{100}\right)^2,$$

erhält man ($\mu = 100$)

$$\Delta E \approx 6.8\cdot10^{-1}\ \frac{\dot{M}}{8\pi GMm_p} = 2\cdot10^{13}\ \text{erg gr}^{-1}\ .$$

Das ergibt eine Leuchtkraft von

$$L_{ff} \approx 2\cdot10^{13}\mu\ \dot{M}\ \text{erg s}^{-1}$$

oder

$$\lambda \approx 2.2\cdot10^{-8}\ \mu^2\ . \qquad \text{(III.9)}$$

IV Die hydrodynamischen Gleichungen

1. Näherungen und Annahmen

a) Rechtfertigung der hydrodynamischen Beschreibung der Materie.

Die mittlere freie Weglänge eines Photons in einem Wasserstoffplasma beträgt (s.z.B. [35][36]):

$$\lambda = 7 \cdot 10^6 \; \frac{T\left[{}^{o}K\right]}{10^4} \; \frac{10^{-18}}{\rho\left[gr\ cm^{-3}\right]} \quad cm$$

(Genauer ist λ der Weg, den ein Proton im Mittel zurücklegen muß, bis es um 90^{o} aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt worden ist.)

Für $n > 10^6\ cm^{-3}$ ist $\lambda < 7 \cdot 10^6$ cm, also wesentlich kleiner als der Akkretionsradius $r_A \approx 10^{13}\ (\frac{M}{M_\odot})$ cm, so daß die Materie hydrodynamisch beschrieben werden kann. Bei der gewöhnlichen Dichte der interstellaren Materie ($n \approx 1\ cm^{-3}$) dagegen ist die hydrodynamische Beschreibung falsch: Die Teilchen bewegen sich praktisch entlang der Geodäten und können ihre Tangentialimpulse nicht abgeben. Deshalb ist die Akkretionsrate in diesem Fall äußerst klein (s. [37]). Ist dagegen ein geringes Magnetfeld in der Materie eingefroren, welches die Teilchen aus ihren Bahnen ablenkt, so wird die hydrodynamische Beschreibungsweise wieder anwendbar ([17][37]).

b) Konstanz der Metrik

Da wir die Materie bis zum Schwarzschildradius beschreiben wollen, ist es erforderlich mit relativistischen Gleichungen zu arbeiten. Wir werden im folgenden die Metrik eines nichtrotierenden, neutralen schwarzen Loches mit konstanter Masse M benutzen, ohne den Massenzuwachs durch die Akkretion zu berücksichtigen. Für $\dot{M} = 100\ L_E/c^2$ und $M = 10\ M_\odot$ ist

$$\left.\frac{\Delta M}{M}\right|_{Jahr} = 10^{-6},$$

so daß M = const eine gute Näherung ist. Ebenso wollen wir die Wirkung der einströmenden Materie auf die Raumkrümmung vernachlässigen.

c) Um den Begriff des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts zwischen Materie und Strahlung zu präzisieren, verwenden wir die sogenannte invariante Verteilungsfunktion $F(x,p)$, $(x = (x^0,x^1,x^2,x^3)$, $p = (p^0,p^1,p^2,p^3))$, die folgende Bedeutung hat: (s. z.B. [38][39].) Im lokalen Ruhesystem der Materie gibt $F(x,p)E^2dEd\Omega dV$ die Zahl dN der Photonen an, welche sich in dem raumartigen Volumenelement dV bei x befinden und deren Energien innerhalb des Intervalls (E,E+dE) und deren Impulsrichtungen innerhalb des Raumwinkelelements $d\Omega$ liegen.

Die Annahme des lokalen, thermodynamischen Gleichgewichts zwischen Materie und Strahlung bedeutet, daß F in zwei Anteile zerlegt werden kann:

$$F = F_o + \Delta F \qquad \text{(IV.1)}$$

mit $F_o \gg \Delta F$, wobei F_o den isotropen und ΔF den anisotropen Anteil der Verteilungsfunktion F bezüglich der räumlichen Impulsverteilung im lokalen Ruhesystem der Materie darstellt.

2. Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen

a) Wir betrachten jetzt also ein Gemisch aus Materie und Strahlung. Da die Materie hydrodynamisch beschrieben werden kann, existiert ein 4-Vektor u, $(u^a u_a = -1)$, der die 4-Geschwindigkeit des Materiestroms angibt. (Wir benutzen die Signatur (-,+,+,+) für die Metrik. Aus der lokalen Additivität von Energie und Impuls im Tangentialraum folgt, daß der Energie-Impulstensor T^{ab} in zwei Anteile zerlegt werden kann, wobei der eine $(T_M{}^{ab})$, die Materie und der andere, $(T_R{}^{ab})$, die Strahlung beschreibt:

$$T^{ab} = T_M^{ab} + T_R^{ab} \quad . \qquad \text{(IV.2)}$$

Für ein ideales Gas ist $T_M{}^{ab}$ durch

$$T_M^{ab} = (\rho + \epsilon_{th} + p_{th})u^a u^b + p_{th} g^{ab} \qquad \text{(IV.3)}$$

gegeben (s. z.B.[40]), wobei p_{th} der (isotrope) thermische Druck, ϵ_{th} die thermische Energiedichte und ς die Dichte der Materie im lokalen Ruhesystem ist.

Wir werden alle Rechnungen im Schwarzschildsystem mit den Koordinaten (t,r,θ,φ) ausführen, so daß der Metriktensor g^{ab} die Form

$$g^{ab} = \begin{bmatrix} -A^{-2} & & & \\ & A^2 & & \\ & & r^{-2} & \\ & & & r^{-2}\sin^{-2}(\theta) \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.4)}$$

mit $A^2 = (1 - \frac{1}{r})$ hat. Die Koordinaten von u lauten in diesem System:

$$(u^a) = (\frac{dt}{ds}, \frac{dr}{ds}, 0, 0), \quad (ds^2 = g^{ab} dx^a dx^b).$$

Für $u^1 := \left|\frac{dr}{ds}\right|$ werden wir 'u' schreiben und dies die 'Geschwindigkeit' der Materie nennen. Einen Beobachter mit der Weltlinie ($t \in \mathbb{R}$, r = const, θ = const, φ = const) werden wir 'stationär' nennen, ebenso die auf ihn bezogenen Größen. Die stationäre Geschwindigkeit bezogen auf ein Orthonormalsystem ist gegeben durch

$$\beta = \frac{1}{A^2}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{A^2}\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{A^2}\frac{u^1}{u^0} = \frac{u}{\Gamma},$$

wobei wir $u^a u_a = -1$ benutzt haben und $\Gamma^{-2} := 1 - \frac{1}{r} + u^2$ gesetzt wurde. β ist also die Geschwindigkeit der Materie, die ein außerhalb des schwarzen Loches ruhender Beobachter mißt. Hängt eine Größe im Schwarzschildsystem nur von der Radialkoordinate r ab, so ist sie 'zeitunabhängig' und 'radialsymmetrisch'.

b) Ableitung des Energie-Impulstensors T_R^{ab} für die Strahlung. T_R^{ab} kann in der Form

$$T_R^{ab}(x) = \int_{p^a p_a = 0} dP\, F(x,p) p^a p^b \qquad \text{(IV.5)}$$

geschrieben werden. dP ist das invariante Volumenelement im Tangentialraum. Wegen der verschwindenden Ruhemasse der Photonen

ist die Hyperfläche im Tangentialraum, über welche zu integrieren ist, durch $p^a p_a = 0$ gegeben (s. z.B.[32]).

Der symmetrischen Tensor T_R^{ab} läßt sich auf folgende Weise zerlegen:

$$T_R^{ab} = U\, u^a u^b + z^{ab} + p^{ab}\, p + W^{ab} \qquad \text{(IV.6)}$$

mit

$$\begin{aligned} p^{ab} &:= g^{ab} + u^a u^b \\ U &:= T_R^{ab}\, u^a u^b \\ p &:= \tfrac{1}{3}\, p_{ab} T_R^{ab} \\ W^{ab} &:= p^a{}_c\, p^b{}_d\, T_R^{cd} - p^{ab}\, p \\ q^a &:= -p^a{}_b\, u_c\, T_R^{bc} \\ z^{ab} &:= u^a q^b + u^b q^a \quad . \end{aligned} \qquad \text{(IV.7)}$$

p^{ak} ist der Projektionstensor orthogonal zu (u^a). U kann als Strahlungsenergiedichte, p als isotroper Strahlungsdruck, gemessen im lokalen Ruhesystem der Materie, interpretiert werden. (q^a) ist der Poyntingvektor des Energiestroms, also gleich dem Strahlungsstrom. (Aus der Definition folgt: $q^a u_a = 0$). Der Tensor (W^{ab}) beschreibt den anisotropen Anteil des Strahlungsdruckes. Wegen $p^a p_a = 0$ und Gl. (IV.5) gilt die bekannte Relation:

$$U = 3\, p \quad .$$

Um die anisotropen Anteile in T_R^{ab} abzuschätzen, betrachten wir die Komponenten von (W^{ab}) und (z^{ab}) im lokalen Ruhesystem der Materie. Dazu zerlegen wir, wie in Abschnitt 1c beschrieben, F(x,p) in seinen isotropen und anisotropen Anteil.

Aus Gleichung (IV.5) und den Definitionen von W^{ab} und Z^{ab} erhält man dann

$$W^{Ok} = 0 \,,$$

$$W^{\alpha\beta} = \int dP\ F\ p^{\alpha} p^{\beta} \,, \quad W^{\alpha\alpha} = \int dP\ F((p^{\alpha})^2 - \tfrac{1}{3} E^2) \,, \qquad \text{(IV.8)}$$

$$Z^{OO} = Z^{\alpha\beta} = 0 \,,$$

$$Z^{O\alpha} = \int dP\ F\ E\ p^{\alpha} \,, \quad (\alpha,\beta = 1,2,3;\ k=0,1,2,3) \,,$$

wobei wir benutzt haben, daß die Energie $E = -u^a p_a$ eines Photons gleich $p^O = ((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2)^{1/2}$ im lokalen Lorentzsystem der Materie ist. Da $F(x,p)$ im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht nur wenig von einer isotropen Verteilungsfunktion abweicht, können die diagonalen Terme von W^{ab} vernachlässigt werden gegenüber jenen, die vom isotropen Druck herrühren. Andererseits sind die nichtdiagonalen Terme wesentlich kleiner als jene von Z^{ab}: Da nämlich

$$E = p^O \geq |p^{\beta}| \qquad (\beta \neq O)$$

gilt, folgt

$$Z^{O\alpha} \geq \int dP\ F\ |p^{\beta}|\ p^{\alpha} \,.$$

Wegen $F_O \gg \Delta F$ ist

$$\int dP\ F\ |p^{\beta}| p^{\alpha} \gg \int dP\ F\ p^{\beta} p^{\alpha} \qquad (\beta \neq \alpha) \,,$$

oder

$$Z^{O\alpha} \gg W^{\beta\alpha} \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3;\ \alpha \neq \beta) \,.$$

Also kann im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (W^{ab}) vernachlässigt werden und man erhält für T_R^{ab}:

$$T_R^{ab} = \tfrac{4}{3} U\, u^a u^b + \tfrac{1}{3} U\, g^{ab} + q^a u^b + q^b u^a \,. \qquad \text{(IV.9)}$$

c) Baryonenerhaltung.

Aus

$$(n \cdot u^a)_{;a} = 0 \qquad (( )_{;} \text{ bedeutet kovariante Ableitung})$$

und der Zeitunabhängigkeit und Radialsymmetrie folgt im Schwarzschildsystem

$$4\pi r^2 \varrho\, u = \text{const} = \mu \qquad \text{(IV.10)}$$

Wegen der Definition von u ist der Massenfluß μ eine positive Größe.

d) Energie und Impulserhaltung.

Die Energie-Impulserhaltung wird durch

$$T^{ab}{}_{;b} = 0 \qquad \text{(IV.11)}$$

ausgedrückt, wobei

$$T^{ab} = (\varrho + \epsilon_{th} + p_{th}) u^a u^b + p_{th}\, g^{ab} + \frac{4}{3} U\, u^a u^b + \frac{1}{3} U\, g^{ab} + q^a u^b + q^b u^a$$

oder

$$T^{ab} = (\epsilon + p) u^a u^b + p\, g^{ab} + q(u^a d^b + u^b d^a) \qquad \text{(IV.12)}$$

gilt, mit:

$\epsilon = \varrho + \epsilon_{th} + U$ Gesamtenergiedichte,

$p = p_{th} + \frac{1}{3} U$ Gesamtdruck.

$d^a := \dfrac{q^a}{(q^a q_a)^{1/2}}$ ist der Einheitsvektor in Richtung von (q^a), und q sein Betrag. Im lokalen Ruhesystem der Materie ist $qd^0 = 0$ und qd^α die Energie, die in der Zeiteinheit eine Einheitsfläche senkrecht zu e_α (Koordinatenvektor zu α-ten Raumkomponente) durchfließt.

Aus (IV.11) und (IV.12) erhält man durch Verjüngung mit dem Geschwindigkeitsvektor (u^a)

$$T^{ab}{}_{;b}\, u_a = 0$$

den 1. Hauptsatz der Thermodynamik:

$$u\,(\epsilon' - \frac{\epsilon + p}{n} n') = \frac{(L\Gamma^2)'}{4\pi r^2 \Gamma} \quad . \tag{IV.13}$$

$\left((\,)' = \frac{d}{dr}\,(\,)\right.$; $L := q/4\pi r^2$: Leuchtkraft im lokalen Ruhesystem der Materie.)

Ebenso erhält man mit Hilfe des Projektiontensors $P_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ aus

$$T^{ab}{}_{;b}\, P_{ak} = 0$$

den Erhaltungssatz für den Radialimpuls, wenn man die erste $(k=0)$ oder 2. Komponente $(k=1)$ dieser Gleichung betrachtet:

$$\frac{\epsilon + p}{2}\,(u^2 - \frac{1}{r})' = -\Gamma^2 p' + \frac{\Gamma \varsigma}{\mu}\,(u^2 L)' \quad . \tag{IV.14}$$

Schließlich kann man noch direkt aus dem Verschwinden der Zeit- oder Radialkomponente der Divergenz des Energie-Impulstensors

$$T^{Ok}{}_{;k} = 0$$

die sogenannte Bernoulligleichung ableiten, die sich sofort integrieren läßt:

$$-r^2 \Gamma\, u(\epsilon + p) + \frac{L}{4\pi r^2}\,(\Gamma^2 + u^2) = \text{const.} \quad . \tag{IV.15}$$

Da $\epsilon \to \varsigma$ für $r \to \infty$ gilt, außerdem $u \to 0$ und $\Gamma \to 1$, hat die Integrationskonstante den Wert $\frac{\lambda - \mu}{4\pi}$.

Das System der Gleichungen (IV.13), (IV.14), (IV.15) ist redundant, aus je 2 von ihnen kann die dritte abgeleitet werden.

Statt der Strahlungsenergiedichte U, dem Strahlungsdruck P_R und der Leuchtkraft L, die im Ruhesystem der Materie gemessen sind, kann man auch die entsprechenden Größen U_S, P_{RS}, L_S im stationären System verwenden. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen wird durch die Matrixgleichung (s. Z.B.[20])

$$\begin{pmatrix} U_S \\ L_S/4\pi r^2 \\ P_{R_S} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\beta^2} \begin{pmatrix} 1 & 2\beta & \beta^2 \\ \beta & (1+\beta^2) & \beta \\ \beta^2 & 2\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \frac{L}{4\pi r^2} \\ P_R \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.16)}$$

$(\beta = \frac{u}{c})$ vermittelt.

V Die Diffusionsgleichung

1. Nach Eckart [31] lautet die relativistische Fouriergleichung für Wärmetransport durch Strahlung:

$$q_k = -\frac{1}{\varrho \bar{k}} \frac{4aT^3}{3} P_{ak} \left(T u^a{}_{;b} u^b + T_{,a} \right) \qquad (V.1)$$

(s. auch [40], Kap. 22).
Dabei ist (q^a) der Strahlungsstrom (s. Gl. (IV.7)) und (u^a) die Geschwindigkeit der Materie. T ist die Temperatur, $\bar{k}$ der gemittelte Absorptionskoeffizient, ϱ die Dichte der Materie, wobei alle Größen im lokalen Ruhesystem definiert sind. $P_{ak} = g_{ak} + u_a u_k$ ist der Projektionstensor.

Der Term $-\frac{1}{\varrho \bar{k}} \frac{4aT^3}{3} P_{ak} T_{,a}$ entspricht dem der nichtrelativistischen Wärmeleitungsgleichung. $Tu^a{}_{;b} u^b$ ist ein rein relativistischer Korrekturterm und berücksichtigt, daß in einer gekrümmten Raum-Zeit der Gleichgewichtszustand wegen der Gravitationsrotverschiebung der Photonen nicht durch T=const gegeben ist, sondern (s. z.B. Tolman [47])

$$T \sqrt{g_{44}} = \text{const.}$$

gilt.
Dies stimmt mit Gleichung (V.1) überein, wenn man annimmt, daß (q^a) entsprechend einem globalen thermodynamischen Gleichgewicht verschwindet und die Metrik zeitunabhängig ist. (In der Schwarzschild-Raum-Zeit ist dann

$$T = \text{const.} \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)^{-1/2},$$

Da Gleichung (1) wie ihr nichtrelativistisches Analogon auf eine parabolische Wärmeleitungsgleichung führt und damit zur instantanen Ausbreitung der Wärmefronten, sind eine Reihe von Versuchen unternommen worden, sie durch zusätzliche, mehr oder weniger ad-hoc gewählte Terme abzuändern (s. z.B.[42,43,44,45]).

In diesem Kapitel wird eine neue Ableitung der Fouriergleichung gegeben, wobei das Resultat etwas von Gl. (1) abweicht. Die neue Gleichung hat - außer, daß die Herleitung sehr einfach ist und nur von der relativistischen Impulserhaltung Gebrauch macht - den Vorteil, daß sie auf eine hyperbolische Gleichung für den Wärmetransport führt und daher das Paradoxon der unendlich schnellen Ausbreitung der Wärmefronten vermeidet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist dabei etwa $c/\sqrt{3}$, entspricht also der ultrarelativistischen Schallgeschwindigkeit.

2. Nach IV kann im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht der Energieimpulstensor für die Strahlung in der Form

$$T_R^{ab} = \frac{4}{3} U u^a u^b + \frac{1}{3} U g^{ab} + q^a u^b + q^b u^a \qquad (V.2)$$

geschrieben werden.

Der Energieimpulstensor T_M^{ab} der Materie allein ist nicht erhalten, da durch den Strahlungsdruck auf die Materie Kraft ausgeübt wird. Der Impulsübertrag ist gegeben durch $\varsigma \bar{\kappa} q_k$ (wobei Effekte, die auf induzierte Emission zurückgehen, vernachlässigt werden (s. z.B. Chandrasekhar [46])), so daß

$$P_{ak} T^{ab}_{M;b} = \varsigma \bar{\kappa} q_k \qquad (V.3)$$

gilt, oder wegen

$$T^{ab}_{\ ;b} = (T^{ab}_R + T^{ab}_M)_{;b} = 0:$$

$$P_{ak} T^{ab}_R = - \varsigma \bar{\kappa} q_k . \qquad (V.4)$$

Die letzte Gleichung läßt sich direkt aus der relativistischen Strahlungstransporttheorie ableiten, wie in Abschnitt (3) gezeigt wird.

Die Divergenz von (5.2) ergibt

$$T_R^{ab}{}_{;b} = \frac{4}{3} U_{;b} u^b u^a + \frac{4}{3} U u^b{}_{;b} u^a + \frac{4}{3} U u^a{}_{;b} u^b$$

$$+ \frac{1}{3} U_{;a} + (q^a u^b + q^b u^a)_{;a} \quad ; \qquad \text{(V.5)}$$

da $u_a u^a = -1$, gilt ferner

$$P_{ak} \left(U_{;b} u^b u^a + U u^b{}_{;b} u^a \right) = 0 \quad .$$

Somit folgt

$$P_{ak} T_R^{ab}{}_{;b} = P_{ak} \left(\frac{4}{3} U u^a{}_{;b} u^b + \frac{1}{3} U_{;a}\right)$$

$$+ P_{ak} (q^a u^b + q^b u^a)_{;b} \quad ,$$

oder, da die Gleichgewichtstemperatur durch

$$U = aT^4 \qquad \text{(a: Strahlungskonstante)}$$

gegeben ist:

$$P_{ak} T_{R;b}^{ab} = \frac{4aT^3}{3} P_{ak} (T u^a{}_{;b} u^b + T_{;a})$$

$$+ P_{ak} \left(q^a u^b + q^b u^a \right)_{;b} \quad . \qquad \text{(V.6)}$$

Mit Gl. (V.4) erhält man damit die erweiterte Fouriergleichung

$$q_k = - \frac{1}{3\kappa} P_{ak} (q^a u^b + q^b u^a)_{;b}$$

$$- \frac{1}{3\kappa} \frac{4aT^3}{3} P_{ak} (T u^a{}_{;b} u^b + T_{,a}) \quad , \qquad \text{(V.7)}.$$

oder, da $q^a u_a = 0$:

$$q_k\left(1 + \frac{1}{\varsigma\bar{\kappa}}\, u^b{}_{;b}\right) + \frac{1}{\varsigma\bar{\kappa}}\, \dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{\varsigma\bar{\kappa}}\,(u_k a_l q^l - q^l u_{k;l}) - \frac{1}{\varsigma\bar{\kappa}}\,\frac{4aT^3}{3} P_{kb}(T\, a^b + T^{;b}) . \quad (V.8)$$

$\dot{q}_k := q_{k;b} u^b$ ist die Zeitableitung im lokalen Ruhesystem der Materie, $u^b{}_{;b}$ (= $-n^{-1}\, n_{,b} u^b$ wegen der Kontinuitätsgleichung) die Volumenexpansion und $a^b = u^b{}_{;k} u^k$ die Beschleunigung der Materie.

3. In diesem Abschnitt soll die exakte Ableitung von Gl.(V.4) gegeben werden aus der relativistischen Strahlungstransporttheorie, wobei die Formulierung von Lindquist [32] benützt wird. (Dabei bedeutet $(x)_L$ die Gleichung (x) bei Lindquist.)

Nach IV gilt

$$q^a = - P^a{}_c u_b\, T_R^{bc} \quad (V.9)$$

und

$$T_R^{bc} = \int_{p^2 - \ell^2 = 0} dP\, F(x,p) p^a p^b \quad . \quad (V.10)$$

Gemäß Gl. $(2.26)_L$ ist Energie- und Impulsbilanz der Strahlung durch

$$T_R^{ab}{}_{;b} = \varsigma\, q_L^a \quad (V.11)$$

gegeben, wobei die Funktionen (q_L^a) die Quellen und Senken der Strahlung beschreibt. (Diese Relation kann aus einer Boltzmanngleichung für Photonen abgeleitet werden.)

Zu zeigen ist die Beziehung

$$P_{ak} T_R^{ab}{}_{;b} = -\varsigma \bar{\kappa} \, q_k$$

mit (q_k) aus Gleichung (V.9). Nach Gl. $(2.27a)_L$ ist q_L^a definiert durch

$$q_L^a = \int dP \; \kappa_L(x,p) \; (J(x,p) - F(x,p)) \qquad \text{(V.12)}$$

Der Zusammenhang zwischen dem invarianten Massenabsorptionskoeffizienten κ_L und dem im lokalen Ruhesystem der Materie gemessenen κ ist gegeben durch

$$\kappa = \frac{\kappa_L}{\nu'} = -\frac{\kappa_L}{u^a p_a} \qquad \text{(V.13)}$$

wobei $\nu' = -p_a u^a$ die Frequenz des durch (p_a) beschriebenen Photons für einen mit der Materie bewegten Beobachter ist.*) Statt der effektiven, invarianten Quellenfunktion J kann man auch den invarianten Emissionskoeffizienten

$$\epsilon_L = \kappa_L \varsigma \; J \qquad \text{(V.14)}$$

benutzen, aus dem man wiederum den im lokalen Ruhesystem definierten Koeffizienten ϵ durch

$$\epsilon = \nu'^2 \epsilon_L = \nu'^3 \cdot \kappa \varsigma \qquad \text{(V.15)}$$

erhält. (Zu Gleichung (V.13), (V.14), (V.15) siehe Lindquist's Fußnote auf S. 493 und Schmidt-Burgk [20] S. 202f. Die Transformationseigenschaften folgen aus der Tatsache, daß die Intensität der Strahlung I im mitbewegten System durch $I = \nu^3 F$ (F(x,p) invariante Verteilungsfunktion) gegeben ist (s. Gl. $(2.8)_L$)).

---

*) Einfachheitshalber setzen wir h = 1.

Aus Gl. (V.12) folgt damit

$$P_{ab} q^b_L = P_{ab} \int dP\, p^b \kappa\, p^c u_c\, F + \frac{1}{3} P_{ab} \int dP\, \epsilon\, \nu'^{-2}\, p^b \quad . \tag{V.16}$$

Im lokalen Ruhesystem der Materie gilt (s. Gl. $(2.4)_L$)

$$dP = \nu' d\nu' d\Omega \quad , \tag{V.17}$$

wobei $d\Omega$ das räumliche Winkelelement $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ ist. In diesem System lauten die Komponenten des Vektors

$$\xi^a := P^{ab} \int dP\, \epsilon\, \nu'^{-2} p_b$$

gleich

$$(\xi^a) = (0, \xi^\alpha) \quad , \alpha = 1,2,3 \quad ,$$

mit

$$\xi^\alpha = P^{\alpha b} \int d\nu' d\Omega\, p_b \epsilon\, \nu'^{-1} = \int d\nu' d\Omega\, p^\alpha \epsilon \nu'^{-1} - \int d\nu' d\Omega\, u^\alpha \epsilon \quad .$$

Da im lokalen Ruhesystem $(u^\alpha) = (0,0,0)$ gilt, außerdem $(p^\alpha) = (\nu' \sin\theta \cos\varphi\ ,\ \nu' \sin\theta \sin\varphi\ ,\ \nu' \cos\theta)$, erhält man

$$(\xi^\alpha)\Big|_{\alpha=1,2,3} = \int d\nu' d\Omega\, \epsilon \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Unter der Annahme, daß der Emissionskoeffizient im lokalen Ruhesystem der Materie winkelsymmetrisch ist, folgt also

$$(\xi^a) = (0,0,0,0) \quad ,$$

und daher aus (V.16)

$$P_{ab}\, q_L^b = P_{ab}\, u_c \int dP\, \kappa\, p^b p^c\, F$$
$$= P_{ab}\, u_c\, \bar{\kappa} \int dP\, p^b p^c\, F$$
$$= \bar{\kappa}\, P_{ab}\, u_c\, T_R^{bc} \quad ,$$

wobei $\bar{\kappa}$ der gemittelte Massenabsorptionskoeffizient im Ruhesystem der Materie ist.
Nach Gl. (V.9) ist also

$$P_{ab}\, q_L^b = -\,\bar{\kappa}\, q_a$$

und mit Gleichung (V.11) erhält man die gesuchte Relation

$$P_{ab}\, T^{bc}_{R;c} = -\varrho\, \bar{\kappa}\, q_a \,.$$

4. Wir wollen die Fouriergleichung (V.8) mit der entsprechenden Gleichung (4.10) von Kranyš [45] vergleichen, die in unserer Notation lautet:

$$q^a + \chi\, q^a{}_{;b} u^b = -\frac{1}{\varrho\bar{\kappa}} \frac{4aT^3}{3} P^{ab} \left(T_{,b} + T\, u_{b;k}\, u^k\right).$$

(Aus Konsistenzgründen müßte sie in

$$q^a + \chi\, P^a{}_k q^k{}_{;b} u^b = \ldots.$$

umgeändert werden.)
χ hat die Dimension einer Zeit und ist eine ad-hoc angenommene Konstante in der Größenordnung des mittleren Zeitintervalls zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen der Photonen. Das aber ist gerade die Bedeutung von $\frac{1}{\bar{\kappa}\varrho}$.

In Anhang C wird gezeigt, daß Gl. (V.8) eine hyperbolische Ausbreitungsgleichung zur Folge hat, wobei sich die Wärmefronten mit der Geschwindigkeit $c/\sqrt{3}$ in der Materie ausbreiten, falls die thermische Energie der Materie gegenüber der Strahlungsenergie vernachlässigt werden kann.

5. Für das in dieser Arbeit behandelte Problem ist der Massenabsorptionskoeffizient im wesentlichen durch Thomsonstreuung ($\kappa = 2\pi$ in den hier verwendeten Einheiten) gegeben. Wegen der Radialsymmetrie und Zeitunabhängigkeit erhält man für die Schwarzschildgeometrie aus Gl. (V.7) und (IV.10)

$$\frac{L}{4\pi r^2} - \frac{(u^2 L)'}{2\pi\mu} = -\frac{4aT^3}{6\pi\zeta}\left(\frac{T}{2\Gamma r^2} + \frac{(u^2)' T}{2\Gamma} + T'\Gamma\right).$$

($L = (q^a q_a)^{1/2}\, 4\pi r^2$: Leuchtkraft im lokalen Ruhesystem der Materie).

VI Diskussion der Gleichungen und Spezialfälle

Das vollständige System der Gleichungen lautet:

$$\frac{\epsilon + p}{2}\,(u^2 - \frac{1}{r})' = -\Gamma^2 p' + \frac{\Gamma \varrho}{\mu}\,(u^2 L)' \qquad \text{(VI.1)}$$

$$u\,(\epsilon' - \frac{\epsilon + p}{\varrho}\varrho') = \frac{(L\Gamma^2)'}{4\pi r^2 \Gamma} \qquad \text{(VI.2)}$$

$$\frac{L}{4\pi r^2} - \frac{(u^2 L)'}{2\pi\mu} = -\frac{4aT^3}{6\pi\varrho}\left(\frac{T}{2\Gamma r^2} + \frac{(u^2)' T}{2\Gamma} + T'\Gamma\right) \qquad \text{(VI.3)}$$

$$4\pi r^2 \varrho u = \mu \qquad \text{(VI.4)}$$

mit

$$\begin{aligned} u^2 &= -\frac{dr}{ds} \\ \epsilon &= \varrho + \chi_1 \varrho T + aT^4 = \varrho + \epsilon_{th} + U \\ p &= \chi_2 \varrho T + \frac{1}{3} aT^4 = p_{th} + \frac{1}{3} U \\ \Gamma^2 &= 1 - \frac{1}{r} + u^2 \end{aligned} \qquad \text{(VI.5)}$$

(VI.1), (VI.2), (VI.3) ist ein System von 3 gekoppelten Differentialgleichung 1. Ordnung.
Ersetzt man (VI.1) oder (VI.2) durch die Bernoulligleichung

$$-r^2\Gamma\,(\epsilon + p)u + \frac{L}{4\pi}(\Gamma^2 + u^2) = \frac{\lambda - \mu}{4\pi}\,, \qquad \text{(VI.6)}$$

so folgt ein System von 2 gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Für χ_1 und χ_2 kann man die Werte für ein nichtrelativistisches Gas einsetzen, da in jenem Bereich, in dem die Elektronen relativistisch werden, thermische Energie und Druck in jedem Fall vernachlässigbar sind gegenüber den entsprechenden Größen der Strahlung.

Man kann das System (6.1), (6.2), (6.3) abgekürzt in der Form

$$A(r,u,L,T,\mu) \begin{pmatrix} u' \\ T' \\ L' \end{pmatrix} = b(r,u,L,T,\mu)$$

schreiben, wobei A eine 3x3 Matrix und b ein 3 komponentiger Vektor ist. Für stationäre Lösungen in einem vorgegebenen Radiusbereich muß u', T' und L' immer endliche Werte annehmen. Existiert also in diesem Bereich ein kritischer Punkt r_* (oder mehrere solche Punkte) mit

$$\det A(r_*) = 0 ,$$

so muß dort

$$\det(A_{red},b) = 0$$

gelten, d.h. die Spalten der 3x3 Matrix (A_{red},b), die entsteht, wenn man in A eine Spalte durch b ersetzt, müssen linear abhängig sein. Durch diese Bedingung wird dann indirekt eine oder mehrere Integrationskonstanten festgelegt.
(P.A.J. Vitello [25] schließt aus seiner Gleichung (10)

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\left(\frac{2k}{m_p}\left(\frac{2T}{r} - T'\right) - \left(\frac{GM}{r}\right)m_p v}{m_p v^2 - 2kT}$$

fälschlich, daß der singuläre Punkt bei $m_p v^2 - 2kT = 0$ liegt, also an jener Stelle, bei der die Geschwindigkeit v gleich der isothermen Schallgeschwindigkeit wird. Mathematisch ist der Schluß auf den singulären Punkt nur korrekt, falls T' = 0 ist, also ist die Folgerung trivial. Jene Lösungen, bei denen Vitello vom kritischen Punkt ab integrierte (wobei die Ableitungen gemäß der L' Hospital'schen Regel berechnet werden), sollten also falsch sein.)

Bevor wir im nächsten Kapitel das vollständige System der Gleichungen betrachten und numerische Lösungen untersuchen, wollen wir einige Spezialfälle des Systems diskutieren.

a) Adiabatische Akkretion.
Nimmt man an, daß die Materie so undurchlässig für die Strahlung ist, daß man Wärmeleitung vernachlässigen kann, so erhält man aus Gleichung (5.1) und (5.2) mit L = L' = O zwei Differentialgleichungen, deren kritischer Punkt durch das Verschwinden der 2x2 Matrix

$$\begin{bmatrix} u(\epsilon + p) - \Gamma^2 p_{th} & \Gamma^2 (p_{th} + \frac{4}{3} U) \\ -\frac{\epsilon}{u} - \frac{\epsilon_{th}}{u} - \frac{\epsilon + p}{u} & \epsilon_{th} + 4U \end{bmatrix} \qquad \text{(VI.7)}$$

gegeben ist. Dies führt auf die Gleichung

$$\beta^2 = \frac{p_{th}(\epsilon_{th} + 4U) - (p_{th} + \frac{4}{3}U)(\epsilon + \epsilon_{th})}{(\epsilon + p)(\epsilon_{th} + 4U)} + \frac{p_{th} + \frac{4}{3} U}{\epsilon_{th} + 4U} \quad . \qquad \text{(VI.8)}$$

Im Anhang (B) zeigen wir, daß dies genau der adiabatischen Schallgeschwindigkeit a entspricht, also der kritische Punkt bei $\beta = a$ liegt.

b) Als nächstes betrachten wir eine adiabatische Strömung, bei der wir thermische Energie und Druck gegenüber den entsprechenden Größen der Strahlung vernachlässigen. Dieser Spezialfall hat den Vorzug, analytisch lösbar zu sein.
Um den kritischen Punkt zu erhalten, kann man natürlich genau wie im vorigen Fall vorgehen, doch führt hier auch eine einfachere Methode zum Ziel.

Wir betrachten die Gleichungen:

$$4\pi r^2 u \varrho = \mu \quad \text{oder} \quad \varrho r u' + r u \varrho' = -2\varrho u \tag{VI.9}$$

$$\epsilon' - \frac{\epsilon + p}{\varrho}\varrho' = 0 \qquad \text{(1. Hauptsatz)} \tag{VI.10}$$

$$\frac{\varrho + \frac{4}{3}U}{2}(u^2 - \frac{1}{r}) = -\Gamma^2 \frac{U}{3} \qquad \text{(Impulsgleichung)}. \tag{VI.11}$$

Die 2. Gleichung läßt sich sofort integrieren ($\epsilon = \varrho + U$) und man erhält

$$U \sim \varrho^{4/3} \qquad \text{oder} \quad U = \frac{U_\infty}{\varrho_\infty^{4/3}} \varrho^{4/3} . \tag{VI.12}$$

In die Impulsgleichung eingesetzt, folgt daraus

$$\frac{(\varrho + \frac{4}{3}U)}{2}(u^2 - \frac{1}{r})' = -\frac{\Gamma^2}{3} \frac{4}{3} U \frac{\varrho'}{\varrho} . \tag{VI.13}$$

Man kann (VI.9) und (VI.13) als System von 2 Differentialgleichungen in den Unbekannten ϱ und u betrachten.
Für den singulären Punkt r gilt:

$$\det \begin{pmatrix} (\varrho + \frac{4}{3}U)u & \frac{1}{3}\Gamma^2 \frac{4}{3}\frac{U}{\varrho} \\ \varrho r & r u \end{pmatrix} = 0 ,$$

oder

$$\beta^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{\varrho}{\varrho + \frac{4}{3}U} = \frac{\frac{4}{9}U}{\varrho + \frac{4}{3}U} . \tag{VI.14}$$

Das ist in der Tat wieder die adiabatische Schallgeschwindigkeit, wie man sofort mit Gl. (VI.8) sieht.
Für Lösungen, die den Schallpunkt durchlaufen, muß bei $r = r_*$ gelten:

$$\det \begin{pmatrix} (\varrho + \frac{4}{3}U)u & \varrho + \frac{4}{3}U \\ \varrho r & 2\varrho u \end{pmatrix} = 0 ,$$

oder $u^2 = \frac{1}{4r}$. Diese Bedingung entspricht genau jener, die man aus den nichtrelativistischen Gleichungen erhält (s. [37]). Im Schallpunkt gelten damit die folgenden Gleichungen, wenn man die Impulsgleichung durch die Bernoulligleichung ersetzt:

$$\frac{u^2}{\Gamma^2} = \frac{4}{9} C \varrho^{4/3} \left(\varrho + \frac{4}{3} C \varrho^{4/3}\right)^{-1}, \tag{i}$$

$$u^2 = \frac{1}{4 r_*} , \tag{ii}$$

$$4\pi r_*^2 \varrho u = \mu , \tag{iii}$$

$$\Gamma + \frac{4}{3} \varrho \Gamma C \varrho^{1/3} = Z , \quad \text{(Bernoulligleichung)}, \tag{iv}$$

$$\Gamma^2 = 1 - \frac{1}{r_*} + u^2 , \tag{v}$$

wobei

$$C := \frac{U_\infty}{\varrho_\infty^{4/3}} , \quad Z := 1 + \frac{4}{3} C \varrho_\infty^{1/3} ,$$

gesetzt wurde. Dies sind 5 Gleichungen für r_* , ϱ , U, Γ . Es ist daher möglich, bei gegebenen ϱ (bzw. μ) μ (bzw. ϱ) daraus zu berechnen. Eliminiert man mit (ii) und (v) u^2 und Γ^2, so bleiben die Gleichungen

$$\left(4 r_* \cdot \left(1 - \frac{3}{4 r_*}\right)\right)^{-1} = \frac{4}{3} C \varrho^{4/3} \left(\varrho + \frac{4}{3} C \varrho^{4/3}\right)^{-1} \tag{i'}$$

$$2\pi r_*^{3/2} \varrho = \mu , \tag{iii'}$$

$$1 - \frac{3}{4 r_*} = (1+Z)^2 \left(1 + \frac{4}{3} \varrho \varrho^{1/3}\right)^{-2} . \tag{iv'}$$

Ersetzt man aus (i') und (iv') noch ϱ mit Hilfe von (iii'), so erhält man das System

$$(1+z)^2 = \left(\frac{4r_* - 3}{4r}\right)\left(1 + \frac{3}{4(r_* - \frac{3}{2})}\right)^2 ,$$

$$\mu = 2\pi r_*^{3/2} \frac{9}{16\, C(r_* - 3/2)} ,$$

das man numerisch lösen muß. Das Verhalten der Lösungen wurde von Michel [48] und Blumenthal und Mathews [49] diskutiert.

c) Zuletzt soll noch das System untersucht werden, das sich ergibt, wenn man thermische Energie und Druck vernachlässigt, aber den Strahlungstransport berücksichtigt.

Multipliziert man Gleichung (VI.3) mit $2\pi\Gamma\varsigma$ und subtrahiert das Ergebnis von Gl. (1), so erhält man

$$\frac{\varsigma + \epsilon_{th} + p_{th}}{2}\left(u^2 - \frac{1}{r}\right)' = -\Gamma^2 p_{th}' + \frac{L\Gamma\varsigma}{2r^2} . \qquad \text{(VI.13)}$$

Man kann im vollständigen System also Gl. (3) oder (1) durch (VI.13) ersetzen.

Mit $p_{th}, \epsilon_{th} \ll \varsigma$ und $|p_{th}'| \ll \frac{L\varsigma}{r^2}$ folgt:

$$(u^2)' = \frac{L\Gamma - 1}{r^2} . \qquad \text{(VI.14)}$$

Mit Hilfe der Strahlungstransportheorie läßt sich zeigen, daß (VI.14) auch für optisch dünne Materie gilt, so daß, wie früher behauptet, für stationäre Akkretion $L < 1$ gelten muß.

Eliminiert man aus dem System

$$(u^2)' = \frac{L\Gamma - 1}{r^2} \qquad \text{(VI.15)}$$

$$\frac{\varsigma + \frac{4}{3}U}{2}\left(u^2 - \frac{1}{r}\right)' = -\Gamma^2\frac{U'}{3} + \frac{\Gamma\varsigma}{\mu}(u^2 L)' \qquad \text{(VI.16)}$$

$$-r^2\Gamma\left(\varsigma + \frac{4}{3}U\right) + \frac{L}{4\pi}(\Gamma^2 + u^2) = \frac{\lambda - \mu}{4} \qquad \text{(VI.17)}$$

durch Differenzieren der 3. Gleichung die Größe L', so folgt aus der 2. Gleichung (mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und (VI.15)):

$$U'r^2\,(\Gamma^2 - 3u^2) = 2U(4u^2r - 1) - \\ - \frac{3}{4\pi r^2 u}\left(\left(\frac{\mu}{2} + 1\right)\Gamma L - (\Gamma^2 - u^2)L^2\right), \qquad \text{(VI.18)}$$

Gleichung (VI.15) und (VI.18) wurde u.a. von J. Pringle auf andere Weise mit Hilfe der Strahlungstransporttheorie abgeleitet [50].

VII Das vollständige System der Gleichungen

Für die numerischen Berechnungen wurde das System (VI.1), (VI.2) (VI.3) verwendet. Der kritische Punkt, also die Nullstelle der Determinante der Gleichungsmatrix ist durch

$$\frac{4}{3}(3\beta^2 - 1)\, U\, (e - \frac{p_{th}}{\beta^2}) + e\beta^2\epsilon_{th} - p_{th}(\epsilon_{th} + p_{th}) + \frac{2p_{th}q}{\beta}(\beta^2 - 1) = 0 \qquad \text{(VII.1)}$$

mit

$$e := \varsigma + \epsilon_{th} + p_{th}$$

$$q = \frac{L}{4\pi r^2} \qquad \text{(Strahlungsfluß)},$$

gegeben, oder, dazu äquivalent, durch

$$(e\beta^2 - p_{th})(\beta^2 - \frac{4}{3}\frac{U}{(\epsilon_{th} + 4U)}) - \frac{p_{th}^2\beta^2 + 2p_{th}q\beta(\beta^2-1)}{\epsilon_{th} + 4U} = 0 . \qquad \text{(VII.2)}$$

In diesen Gleichungen tritt weder der Radius r, noch die von der Wahl des Koordinatensystems abhängige Geschwindigkeit u auf, dafür die physikalisch relevante Geschwindigkeit β , die ein stationärer Beobachter der Materieströmung zuordnet.

Gleichung (VII.1) bzw. (VII.2) ist zweiten Grades in β^2, die Werte der beiden Lösungen in β^2 liegen zwischen null und eins und werden daher von der Materieströmung durchlaufen.

Die eine Lösung in β^2 stimmt, wenn man Strahlungsenergie und Strahlungstransport vernachlässigt, genau mit der adiabatischen Schallgeschwindigkeit überein (s. Gl. (VII.1)). Andernfalls (mit $U \neq 0$, $q \neq 0$) weicht die Lösung wegen der durch die Strahlung verursachten Wärmeleitung von der adiabatischen Schallgeschwindigkeit eines Gases mit 'eingefrorener' Strahlung ab. Diese Lösung ist jedoch, da sie im optisch dünnen Bereich

liegt (wo die Annahme des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts nicht gilt), für den Akkretionsvorgang im optisch dicken Bereich irrelevant: sie wurde durch Bondi's Bedingung ersetzt (s. III) und führte zur Festlegung der Akkretionsrate bei gegebenen Anfangsbedingungen. Ab dem Akkretionsradius bewegt sich die Materie mit Überschallgeschwindigkeit - so war der Akkretionsradius gerade definiert -, folglich erreicht sie auch den optisch dicken Bereich mit Überschallgeschwindigkeit.

Die zweite Lösung in β^2 liegt etwa bei $\beta^2 = \frac{1}{3}$, sie beschreibt die durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärmefronten gegebene Singularität. Da für $r \to 1$ die stationäre Geschwindigkeit β ebenfalls gegen eins geht, muß dieser singuläre Punkt von der Materieströmung durchlaufen werden. Dies bedeutet, wie bereits im 2. Kap. ausgeführt wurde, daß die stationäre Geschwindigkeit der Materie in der Nähe des Schwarzschildhorizonts größer als jede Geschwindigkeit sein muß, die auf Ausbreitungsphänomene innerhalb der Materie zurückgeht. Daher (s. VI) erhält man eine zusätzliche Bedingung, einer inneren Randbedingung entsprechend, welche den noch freien Parameter, nämlich den Wert der Leuchtkraft λ bei $\tilde{r}_o$ (bzw. $\hat{r}_o$, s. III), wo die Strahlung ins Gleichgewicht mit der Materie kommt, festlegt.

Zur numerischen Integration des Systems (VI.1), (VI.2), (VI.3) wurde ein Runge-Kutta -Verfahren verwendet. Dabei wurde die Genauigkeit der Rechnung mit Hilfe der Bernoulligleichung (VI.6) überprüft und von $\tilde{r}_o$ (bzw. $\hat{r}_o$) ab zu kleineren Radien nach innen integriert. Da der Wert der Leuchtkraft L bei $\tilde{r}_o$ (bzw. $\hat{r}_o$) zunächst nicht bekannt ist, ist es zweckmäßig, statt der Anzahldichte n_∞ der Wasserstoffionen in großer Entfernung vom schwarzen Loch ($r > r_A$) den Massenfluß μ vorzugeben. Hat man die Leuchtkraft L bei $\tilde{r}_o$ (bzw. $\hat{r}_o$) dann bestimmt ($L(r_o) \equiv \lambda$), so erhält man nach Gleichung (III.4) für die Anzahldichte:

$$\left(\frac{n\,[cm^{-3}]}{10^8} \right) = \frac{\mu}{1.38 \cdot 10^2} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) (1 - \lambda)^2 \qquad \text{(VII.3)}$$

Die Integration durch den singulären Punkt kann natürlich nicht direkt durchgeführt werden. Dies und die Methode, mit welcher der Parameter λ bestimmt wird, läßt sich leicht durch folgendes Beispiel veranschaulichen:

Die Differentialgleichung der Funktionen $y = \frac{\lambda}{x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) lautet $x'y = y$. Die Stelle $x = 0$ stellt also einen kritischen (d.h. singulären) Punkt dar. Sucht man eine Lösung, die diesen Punkt stetig durchläuft, so folgt die Nebenbedingung: $y(x=0) = 0$. Integriert man jedoch numerisch von positiven x-Werten zu kleineren Werten, so wird man immer entweder auf den nach $+\infty$ oder nach $-\infty$ divergierenden Art der Lösungsschar gelangen. Aus diesem Verhalten der Lösungen aber läßt sich der gesuchte Anfangswert (nämlich $y=0$) beliebig genau iterativ bestimmen und daraus der Wert des Parameters λ (also $\lambda = 0$) erhalten.

VIII Numerische Lösungen

1. $M = 10\ M_\odot$, $\mu = 200$

Wir studieren das Verhalten der Lösungen zunächst an einem speziellen Beispiel und betrachten dazu ein schwarzes Loch mit 10 Sonnenmassen und einem Massenfluß von $\mu = 200$.

In Abb. (1) sind im doppellogarithmischen Maßstab der Verlauf der Leuchtkraft (im mitbewegten System der Materie) und der zugehörigen Materiegeschwindigkeiten (durchgezogene Linie) für verschiedene Werte λ der Leuchtkraft bei r_o über dem Abstand vom schwarzen Loch aufgetragen. Das Verhalten der Lösungen für $\lambda \geq 7{,}179 \cdot 10^{-6}$ entspricht etwa jenem, das man bei Verwendung von nichtrelativistischen Gleichungen erhält (s. P. Kafka und P. Mészáros [28]): Das Gas bewegt sich zunächst als Überschallströmung in der Nähe des freien Falls. (In dem verwendeten Maßstab wird die Freifallkurve durch eine Gerade wiedergegeben.) Bei einem bestimmten Radius durchläuft das Gas einen Schock, der umso schärfer ausgeprägt ist, je näher λ bei $7{,}179 \cdot 10^{-6}$ ist. Dabei wird die Leuchtkraft zuerst größer als Eddingtonleuchtkraft L_E und fällt dann auf etwa L_E ab, so daß die Materie auf eine Unterschallströmung abgebremst wird (s. Abb. (2)). Da der Stoß durch die Diffusion der Strahlung verbreitet wird, stört er die numerische Integration nicht. (Diese bricht bei kleineren Radien zusammen, da die Dichte divergiert, wenn die Geschwindigkeit der Materie gegen null geht.) Diese Lösungen beschreiben keine stationäre Akkretion in schwarze Löcher, da das Gas den Schwarzschildhorizont mit Überschallgeschwindigkeit durchqueren muß. Je mehr sich die Leuchtkraft dem Wert $7{,}196 \cdot 10^{-6}$ bei r_o annähert, bei desto kleineren Radien erfolgt der Anstieg der Leuchtkräfte und das Abfallen der Geschwindigkeit. Für alle Werte $\lambda < 7{,}167 \cdot 10^{-6}$ beginnt die Leuchtkraft plötzlich abzufallen und wird negativ. Der mathematische Grund für das Abbiegen nach negativen Werten für $\lambda < 7{,}167 \cdot 10^{-6}$ bzw. nach Werten größer als L_E für $\lambda > 7{,}167 \cdot 10^{-6}$ ist, daß die Lösungen die kritische Bedingung an der Stelle, wo

die Gleichungsdeterminante gleich null wird, nicht erfüllen. Daher beginnen sie, ehe diese Stelle erreicht ist, zu divergieren. (Betrachtet man dagegen Modelle, bei denen die Materie von außen 'eingeschossen' wird mit $\beta = u/\Gamma > \frac{1}{3}$, also die Materiegeschwindigkeit über der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärmefronten liegt, so erhält man Lösungen, die bis zum Schwarzschildhorizont reichen.) Da die Lösungen stetig von den Anfangswerten der Leuchtkraft bei r_o abhängen, läßt sich die gesuchte Lösung, welche die kritische Bedingung erfüllt, und damit der gesuchte Wert λ der Leuchtkraft bei r_o innerhalb der durch die Rechenanalage gesetzten Grenzen beliebig genau durch Einschachtelung bestimmen. Das Verhalten der resultierenden Lösung und der Wert der zugehörigen Leuchtkraft λ ist vom exakten Radius r_o, ab welchem lokales thermodynamisches Gleichgewicht angenommen wird, relativ unabhängig. Die Temperatur nach dem Stefan-Boltzmanngesetz für $r_o = \mathring{r}_o$ (s. III.3), beträgt $1{,}69 \cdot 10^4$ °K und $1{,}24 \cdot 10^4$ °K für $r_o = \hat{r}_o$. Sie entspricht also in etwa der Temperatur der Materie im optisch dünnen Bereich, so daß die Materie bei r_o wie ein schwarzer Körper strahlt. Dies zeigt, daß die Vernachlässigung der Übergangszone zwischen dem optisch dünnen und dicken Bereich der Materieströmung gerechtfertigt ist.

Die Temperatur wächst zwischen $r = 2 \cdot 10^3$ und $r = 20$ etwa wi $r^{-0{,}63}$ (s. Abb. 1). Ein Anwachsen wie $r^{-0{,}5}$ bzw. r^{-1} entspräche einem Adiabatenindex von $\frac{4}{3}$ (nur Strahlungsenergie: $U \propto \varrho^{4/3}$) bzw. $\frac{5}{3}$ (nur thermische Energie: $\epsilon_{th} \propto \varrho^{5/3}$) bei freifallender Materie ($\varrho \propto r^{-3/2}$). Der starke Anstieg bei kleineren Radien ist eine Folge der Abbremsung der Materie. Da die Strahlungsenergie stärker wächst als die thermische Energie und die gesuchte Lösung in der Nähe des freien Falls liegt, entspricht der tatsächliche Temperaturverlauf dem Adiabatenindex 4/3.

In Abb. 3 ist neben L die stationäre Leuchtkraft L_s aufgetragen (für $\mu = 1000$). Der nichtrelativistische Zusammenhang zwischen L und L_s ist gegeben durch

$$L_S = L - \frac{16\pi r^2 u\, U}{3} \quad , \quad (U=aT^4).$$

L_S ist also um den konvektiven Leuchtkraftterm $\frac{16\pi r^2 u}{3} U$ reduziert gegenüber L und wird deshalb an einer bestimmten Stelle negativ. Diese Stelle liegt in allen Modellen bei etwa $r = \mu$. Bei $r = r_o$ stimmen beide Leuchtkräfte ungefähr überein für alle betrachteten Modelle. (Andernfalls wäre die Vernachlässigung der Übergangszone nicht statthaft.) Es zeigt sich also, daß bei sphärisch-symmetrischer zeitunabhängiger Akkretion wegen des Vorhandenseins eines zweiten kritischen Punktes die Leuchtkraft, die im optisch dichten Bereich entsteht, sehr klein ist und im Vergleich zu der in der äußeren Region erzeugten (s. III.4) vernachlässigt werden kann. Sieht man davon trotzdem einmal ab, so erhält man folgendes Bild: Der Massenfluß $\mu = 200$ entspricht einer Anzahldichte von $1{,}45 \cdot 10^7$ Wasserstoffatomen pro cm^3 im Unendlichen. Dabei werden pro sec $2{,}78 \cdot 10^{20}$ g Materie verschluckt bzw. $4{,}6 \cdot 10^{-6}$ Sonnenmassen pro Jahr. Der Radius der strahlenden Fläche beträgt $3 \cdot 10^{10}$ cm oder 0,43 Sonnenradien. Sie strahlt wie ein schwarzer Körper mit der Temperatur $T = 1{,}1 \cdot 10^4$ °K, die Leuchtkraft beträgt 2,33 Sonnenleuchtkräfte. Damit die Strahlung entweichen kann, darf die HII-Region nicht ausgedehnter sein als

$$l = \frac{1}{\kappa \varrho} ,$$

wobei $\kappa \varrho$ der Absorptionskoeffizient für Thomsonstreuung ist, also

$$l = \frac{1}{\sigma_{th}\, n} = 10^{17} \text{ cm} = 0{,}03 \text{ pc}.$$

Die Gesamtmasse der HII-Region beträgt dann etwa

$$\frac{4}{3}\pi l^3 \varrho = 1{,}5 \cdot 10^2 \cdot M_\odot ,$$

so daß das schwarze Loch $3 \cdot 10^7$ Jahre stationär akkretieren kann. Die absolute Helligkeit des Objekts beträgt M = 3,79,es wäre also als B6 Stern unterhalb der Hauptreihe beobachtbar.

2. Modelle mit 1, 10, 100 und 1000 Sonnenmassen.

In den Tabellen (1) bis (4) sind die Ergebnisse für verschiedene Massen des schwarzen Lochs und Massenflüsse wiedergegeben. In den a-Tabellen wurde der Radius r_o, bei dem Materie und Strahlung ins Gleichgewicht kommen, wie bei Kafka und Mészáros [28] jeweils aus der optischen Tiefe bezüglich Thomsonstreuung bestimmt ($r_o = \tilde{r}_o$), in den b-Tabellen aus der effektiven optischen Tiefe ($r_o = \hat{r}_o$). Bei $M = 1000\ M_\odot$ wurde nur r_o benutzt. In der ersten Spalte ist jeweils der Massenfluß eingetragen, in der zweiten der Radius r_o, ab dem nach innen integriert wurde. Die Temperatur T (3. Spalte) bei r_o wurde gleich die effektiven Temperaturen T_{eff} (4. Spalte) gesetzt, falls $T > 10^4\ ^oK$ und entsprechend der Temperatur der HII-Wolke $10^4\ ^oK$, falls $T_{eff} \leq 10^4\ ^oK$. Es zeigt sich, daß die Abweichungen von $10^4\ ^oK$ umso größer werden, je größer der Massenfluß μ und die Masse des schwarzen Loches ist, wobei sie, wie nach dem in (III) Ausgeführten zu erwarten ist, für $r_o = \tilde{r}_o$ größer sind als für $r_o = \hat{r}_o$. Es ist klar, daß die Vernachlässigung der expliziten Behandlung der Übergangsregion für $T \lesssim 7\text{-}8 \cdot 10^4\ ^oK$ zu immer größeren Fehlern bei der Bestimmung von λ führt. Dies wird auch aus dem Verhalten der Leuchtkräfte bei $r_o \approx \tilde{r}_o$ bzw. $\hat{r}_o$ sichtbar (s. Abb. 5b, 7b, 8b). Stimmt T_{eff} ungefähr mit $10^4\ ^oK$ überein, so bleibt L nahezu konstant, andernfalls fällt es zunächst etwas ab bevor es bei kleineren Radien über Eddingtonleuchtkraft wächst bzw. negativ wird. Für alle Modelle, bei denen die Temperatur wesentlich kleiner als $10^4\ ^oK$ ist, liegt der wahre Radius, bei dem die Materie ins Gleichgewicht mit der Strahlung kommt, bei kleineren Werten als $\tilde{r}_o$ bzw. $\hat{r}_o$: Dies kann man aus der 5. Spalte entnehmen, wo der Radius r_E eingetragen ist, bei dem $T_{eff} = 10^4\ ^oK$ ist. In den a-Tabellen ist in der 6. Spalte für $T_{eff} < 10^4\ ^oK$ $\tau'_{eff}{}^r = \tau_{Thom}\,\S\, r_E$ eingetragen, also die differenzierte optische Tiefe bezüglich der Thomsonstreuung an der Stelle r_E. Das $\tau'_{eff}{}^r$ in den b-Tabellen dagegen ist die differenzierte optische Tiefe (bezügl. Thomsonstreuung) bei $r_o = \hat{r}_o$.

In der 7. Spalte steht die Leuchtkraft L bei $r = r_o$, in der achten die Leuchtkraft L_{eff} bei $r = r_E$. Für $T \geq 10^4$ °K stimmen beide überein, da dann die Temperatur bei r_o aus dem Stefan-Boltzmanngesetz bestimmt wurde. Endlich ist in den a-Tabellen in der 9. Spalte der Radius aufgeführt, bei dem die effektive optische Tiefe gleich 1 wäre und in der 10. Spalte die Anzahldichte pro cm^3 der Wasserstoffionen im Unendlichen.

Die Abblindungen (5) bis (9) zeigen den Verlauf der Leuchtkräfte im mitbewegten System der Materie für einige ausgewählte Massenflüsse μ. Bei den a.)-Abbildungen wurde $r_o = \tilde{r}_o$ gesetzt, bei den b.)-Abbildungen $r_o = \hat{r}_o$.

In Abbildung (10a) sind die resultierenden Leuchtkräfte λ bei $r = \tilde{r}_o$ gegen den Massenfluß μ aufgetragen, in Abbl. (10b) für $r_o = \hat{r}_o$ und zwar hier nur insoweit, als die Abweichung der zugehörigen effektiven Temperatur nicht zu groß ist. Es zeigt sich, daß die entsprechenden Werte auf einer Geraden liegen, also einem Potenzgesetz genügen mit demselben Exponenten für alle M, nämlich

$$\lambda = A_M \cdot \mu^{0.83}.$$

Die von der Masse des schwarzen Loches abhängigen A-Faktoren sind in Abbl. 12 eingetragen, sie liegen ebenfalls ungefähr auf einer Geraden und sind durch ein Potenzgesetz darstellbar, so daß man die Ergebnisse in der folgenden Gleichung zusammenfassen kann:

$$\lambda = 2 \cdot 10^{-7} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-0.3} \mu^{0.83}. \qquad \text{(VIII.1)}$$

Der Fall $M = 1$ und $\mu = 1{,}38 \cdot 10^2$ (entsprechend $n_\infty = 10^8$ Teilchen pro cm^3) wurde von Tamazawa et al. [27] untersucht. Die resultierenden Leuchtkräfte stimmen überein. Diese Tatsache ist nicht erstaunlich, da Tamazawa et al. den Strahlungstransport explizit berücksichtigten (unter Verwendung eines variablen Eddingtonfaktors $f = \frac{\text{Strahlungsdruck}}{\text{Strahlungsenergie}}$). Sie verwendeten dabei ein System von Gleichungen, das Castor und Casinelli [33] aus der Strahlungstransporttheorie (s. [32]) abgeleitet haben. Für $f = \frac{1}{3}$, also

dort, wo Materie und Strahlung im Gleichgewicht sind, sind diese Gleichungen äquivalent zur Fouriergleichung (V.8).

Die Abbildungen (11a) bzw. (11b) geben die effektiven Temperaturen bei $\tilde{r}_o$ bzw. $\hat{r}_o$ wieder in Abhängigkeit von der Akkretionsrate μ. Aus ihnen läßt sich entnehmen, wie weit die Vernachlässigung der expliziten Behandlung des Strahlungstransportes in der Übergangszone zwischen optisch dickem und dünnem Bereich noch gute Modelle liefert.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß sphärisch symmetrische, zeitunabhängige, überkritische Akkretion nur kleine Leuchtkräfte im Vergleich zur Eddingtonleuchtkraft ergibt. Die Ursache hierfür ist die Existenz eines zweiten kritischen Punktes. Er bewirkt, daß die Leuchtkraft im optisch dicken Bereich der Strömung, falls sie größer ist als die durch Gleichung (VIII.1) gegebene, so stark anwächst, daß die Materie abgebremst wird und die Strömung instationär wird. In allen Fällen ist die im optisch dicken Bereich erzeugte Leuchtkraft kleiner als jene, die in der äußeren Region durch die Kühlung der Materie erzeugt wird.
Aus Gleichung (III.9) und (VIII.1) folgt, daß das Verhältnis ungefähr

$$\frac{\lambda_{\text{Außenbereich}}}{\lambda_{\text{opt.dicker Bereich}}} \approx 1{,}1\ 10^{-1}\ M^{0{,}3}\ \mu^{1{,}17}$$

ist.

Tab. 1a

$M = 1\ M_\odot$

μ	r	T	T_{eff}	r_E	$\tau'_{eff}{}^r$	L	L_{eff}	r_o	$n_\infty/10^8$
100	$2.50\ 10^3$	$4.21\ 10^4$				$9\text{-}10\ 10^{-6}$		$8.4\ 10^3$	0.72
300	$2.25\ 10^4$	$1.86\ 10^4$				$2\text{-}3\ 10^{-5}$		$3.1\ 10^4$	2.17
500	$6.25\ 10^4$	$1.20\ 10^4$				$3\text{-}4\ 10^{-5}$		$5.7\ 10^4$	3.62
700	$1.23\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$9.11\ 10^3$	$9.67\ 10^4$	1.13	$4\text{-}5\ 10^{-5}$	$4.43\ 10^{-5}$	$8.6\ 10^4$	5.07
900	$2.00\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$7.38\ 10^3$	$9.60\ 10^4$	1.45	$5\text{-}6\ 10^{-5}$	$5.68\ 10^{-5}$	$1.2\ 10^5$	6.52
1100	$3.00\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$6.27\ 10^3$	$1.03\ 10^5$	1.67	$6\text{-}7\ 10^{-5}$	$6.32\ 10^{-5}$	$1.4\ 10^5$	7.97
4000	$4.00\ 10^6$	$1.0\ 10^4$	$2.81\ 10^3$	$2.61\ 10^5$	4.31	$4\text{-}5\ 10^{-4}$	$2.61\ 10^{-4}$	$7.1\ 10^5$	28.99
7000	$1.24\ 10^7$	$1.0\ 10^4$	$2.26\ 10^3$	$3.87\ 10^5$	5.65	$1\text{-}2\ 10^{-3}$	$7.81\ 10^{-4}$	$1.4\ 10^6$	50.70
9000	$2.52\ 10^7$	$1.0\ 10^4$	$1.88\ 10^3$	$4.13\ 10^5$	9.37	$3\text{-}4\ 10^{-3}$	$5.14\ 10^{-4}$	$1.8\ 10^6$	65.20

Tab.1b

$M = 1\ M_\odot$

μ	r	T	T_{eff}	r_E	τ'_{eff} r	L	L_{eff}
100	$8.37\ 10^3$	$2.26\ 10^4$				$8\text{-}9\ 10^{-6}$	
300	$3.13\ 10^4$	$1.58\ 10^4$				$2\text{-}3\ 10^{-5}$	
500	$5.77\ 10^4$	$1.25\ 10^4$				$3\text{-}4\ 10^{-5}$	
700	$8.64\ 10^4$	$1.08\ 10^4$				$4\text{-}5\ 10^{-5}$	
900	$1.17\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$9.71\ 10^3$	$1.04\ 10^5$	1.41	$5\text{-}6\ 10^{-5}$	5.25^{-5}
1000	$1.33\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$9.12\ 10^3$	$1.05\ 10^5$	1.55	$5\text{-}6\ 10^{-5}$	5.46^{-5}
1100	$1.49\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$8.94\ 10^3$	$1.17\ 10^5$	1.43	$7\text{-}6\ 10^{-5}$	6.91^{-5}
3000	$4.96\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$6.37\ 10^3$	$1.71\ 10^5$	2.13	$1\text{-}2\ 10^{-4}$	1.34^{-4}
5000	$9.15\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$5.19\ 10^3$	$2.28\ 10^5$	2.61	$2\text{-}3\ 10^{-4}$	2.28^{-4}
7000	$1.37\ 10^6$	$1.0\ 10^4$	$4.56\ 10^3$	$2.47\ 10^5$	2.99	$3\text{-}4\ 10^{-4}$	3.77^{-4}
9000	$1.85\ 10^6$	$1.0\ 10^4$	$4.14\ 10^3$	$2.78\ 10^5$	3.55	$4\text{-}5\ 10^{-4}$	4.03^{-4}
11000	$2.36\ 10^6$	$1.0\ 10^4$	$3.85\ 10^3$	$2.95\ 10^5$	3.58	$5\text{-}6\ 10^{-4}$	4.71^{-4}

Tab.2a

$M = 10\ M_{\odot}$

μ	r	T	T_{eff}	r_E	τ'_{eff} r	L	L_{eff}	r_o	$n_x/10^8$
100	$2.50\ 10^3$	$2.12\ 10^4$				$4\text{-}5\ 10^{-6}$		$3.3\ 10^3$	0.1
300	$2.25\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$9.43\ 10^3$	$1.84\ 10^4$	1.11	$1\text{-}2\ 10^{-5}$	$1.95\ 10^{-5}$	$1.2\ 10^4$	0.2
500	$6.25\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$6.21\ 10^3$	$2.01\ 10^4$	1.75	$2\text{-}3\ 10^{-5}$	$2.52\ 10^{-5}$	$2.2\ 10^4$	0.4
700	$1.23\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$4.81\ 10^3$	$1.93\ 10^4$	2.58	$3\text{-}4\ 10^{-5}$	$2.59\ 10^{-5}$	$3.4\ 10^4$	0.5
900	$2.00\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$4.14\ 10^3$	$2.47\ 10^4$	2.86	$5\text{-}6\ 10^{-5}$	$3.18\ 10^{-5}$	$4.8\ 10^4$	0.6
1000	$2.50\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.87\ 10^3$	$2.30\ 10^4$	3.32	$6\text{-}7\ 10^{-5}$	$3.15\ 10^{-5}$	$5.2\ 10^4$	0.7
1100	$3.00\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.64\ 10^3$	$2.36\ 10^4$	3.58	$7\text{-}8\ 10^{-5}$	$2.93\ 10^{-5}$	$5.6\ 10^4$	0.8
3000	$2.25\ 10^6$	$1.0\ 10^4$	$2.51\ 10^3$	$3.58\ 10^4$	6.94	$9\text{-}10\ 10^{-4}$	$6.95\ 10^{-5}$	$2.0\ 10^5$	2.2
5000	$6.31\ 10^6$	$1.0\ 10^4$	$2.24\ 10^3$	$1.21\ 10^5$	7.21	$4\text{-}5\ 10^{-3}$	$7.54\ 10^{-4}$	$3.6\ 10^5$	3.6
7000	$1.36\ 10^7$	$1.0\ 10^4$	$2.16\ 10^3$	$1.83\ 10^5$	8.96	$1\text{-}2\ 10^{-2}$	$6.74\ 10^{-3}$	$6.1\ 10^5$	5.0
9000	$2.25\ 10^7$	$1.0\ 10^4$	$1.86\ 10^3$	$1.87\ 10^5$	10.12	$2\text{-}3\ 10^{-2}$	$1.79\ 10^{-3}$	$7.3\ 10^5$	6.5

Tab.2b

$M = 10\ M_\odot$

μ	r	τ	T_{eff}	r_E	$\tau'_{eff}{}^r$	L	L_{eff}
100	$3.33\ 10^3$	$1.74\ 10^4$				$4\text{-}5\ 10^{-6}$	
300	$1.24\ 10^4$	$1.07\ 10^4$				$9\text{-}10\ 10^{-6}$	
500	$2.30\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$9.36\ 10^3$	$1.88\ 10^4$	1.65	$1\text{-}2\ 10^{-5}$	$1.43\ 10^{-5}$
700	$3.44\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$8.46\ 10^3$	$2.25\ 10^4$	1.89	$2\text{-}3\ 10^{-5}$	$2.55\ 10^{-5}$
900	$4.65\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$7.28\ 10^3$	$2.17\ 10^4$	2.09	$2\text{-}3\ 10^{-5}$	$2.71\ 10^{-5}$
1000	$5.28\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$7.34\ 10^3$	$2.73\ 10^4$	2.18	$3\text{-}4\ 10^{-5}$	$3.68\ 10^{-5}$
1100	$5.92\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$6.93\ 10^3$	$2.43\ 10^4$	2.26	$3\text{-}4\ 10^{-5}$	$3.83\ 10^{-5}$
3000	$1.97\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$4.77\ 10^3$	$3.51\ 10^4$	3.38	$9\text{-}10\ 10^{-5}$	$9.01\ 10^{-5}$
5000	$3.64\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$4.18\ 10^3$	$4.59\ 10^4$	4.14	$1\text{-}2\ 10^{-4}$	$1.10\ 10^{-4}$
7000	$5.45\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.78\ 10^3$	$5.26\ 10^4$	4.74	$2\text{-}3\ 10^{-4}$	$1.65\ 10^{-4}$
9000	$7.37\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.49\ 10^3$	$5.49\ 10^4$	5.24	$3\text{-}4\ 10^{-4}$	$1.88\ 10^{-4}$
11000	$9.38\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.27\ 10^3$	$5.82\ 10^4$	5.68	$4\text{-}5\ 10^{-4}$	$1.99\ 10^{-4}$

Tab.3a

$M = 100\ M_\odot$

μ	r	T	T_{eff}	r_E	τ'_{eff} r	L	L_{eff}	r_o	$n_\infty/10^7$
100	$2.50\ 10^3$	$1.0\ 10^4$	$9.92\ 10^3$	$2.31\ 10^3$	1.04	$2\text{-}3\ 10^{-6}$	$2.33\ 10^{-6}$	$1.3\ 10^3$	0.1
300	$2.25\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$5.34\ 10^3$	$4.43\ 10^3$	2.25	$1\text{-}2\ 10^{-5}$	$1.05\ 10^{-5}$	$5.3\ 10^3$	0.2
500	$6.25\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$4.19\ 10^3$	$5.31\ 10^3$	3.43	$5\text{-}6\ 10^{-5}$	$1.64\ 10^{-5}$	$9.1\ 10^3$	0.4
700	$1.23\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$4.04\ 10^3$	$6.29\ 10^3$	3.08	$1\text{-}2\ 10^{-4}$	$8.65\ 10^{-5}$	$1.4\ 10^4$	0.5
900	$2.00\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.48\ 10^3$	$9.22\ 10^3$	4.69	$2\text{-}3\ 10^{-4}$	$5.27\ 10^{-5}$	$2.0\ 10^4$	0.6
1100	$3.00\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.23\ 10^3$	$9.61\ 10^3$	5.61	$4\text{-}5\ 10^{-4}$	$4.93\ 10^{-5}$	$2.2\ 10^4$	0.8
3000	$2.27\ 10^6$	$1.0\ 10^4$	$2.51\ 10^3$	$4.18\ 10^4$	7.35	$9\text{-}10\ 10^{-3}$	$9.29\ 10^{-4}$	$8.3\ 10^4$	2.2
5000	$6.94\ 10^6$	$1.0\ 10^4$	$2.14\ 10^3$	$6.85\ 10^4$	9.58	$4\text{-}5\ 10^{-2}$	$2.57\ 10^{-3}$	$1.5\ 10^5$	3.6

Tab. 3b

$M = 100\ M_{\odot}$

μ	r	T	T_{eff}	r_E	$\tau'_{eff}{}^r$	L	L_{eff}
100	$1.33\ 10^3$	$1.36\ 10^4$				$2\text{-}3\ 10^{-6}$	
300	$4.96\ 10^3$	$1.0\ 10^4$	$8.38\ 10^3$	$3.22\ 10^3$	2.13	$5\text{-}6\ 10^{-6}$	$5.53\ 10^{-6}$
500	$9.15\ 10^3$	$1.0\ 10^4$	$7.01\ 10^3$	$3.63\ 10^3$	2.61	$9\text{-}10\ 10^{-6}$	$9.24\ 10^{-6}$
700	$1.37\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$6.81\ 10^3$	$5.75\ 10^3$	2.99	$1\text{-}2\ 10^{-5}$	$1.13\ 10^{-5}$
900	$1.85\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$6.49\ 10^3$	$6.85\ 10^3$	3.31	$2\text{-}3\ 10^{-5}$	$2.53\ 10^{-5}$
1000	$2.10\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$6.05\ 10^3$	$6.28\ 10^3$	3.45	$2\text{-}3\ 10^{-5}$	$2.59\ 10^{-5}$
1100	$2.36\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$5.75\ 10^3$	$6.27\ 10^3$	3.58	$2\text{-}3\ 10^{-5}$	$2.83\ 10^{-5}$
3000	$7.85\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$5.06\ 10^3$	$1.59\ 10^4$	5.35	$1\text{-}2\ 10^{-4}$	$1.26\ 10^{-4}$
5000	$1.45\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$4.12\ 10^3$	$1.67\ 10^4$	6.57	$2\text{-}3\ 10^{-4}$	$1.49\ 10^{-4}$
7000	$2.17\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.62\ 10^3$	$1.41\ 10^4$	7.51	$3\text{-}4\ 10^{-4}$	$1.72\ 10^{-4}$
9000	$2.94\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.45\ 10^3$	$1.57\ 10^4$	8.31	$5\text{-}6\ 10^{-4}$	$1.43\ 10^{-4}$
11000	$3.73\ 10^5$	$1.0\ 10^4$	$3.28\ 10^3$	$1.66\ 10^4$	9.02	$7\text{-}8\ 10^{-4}$	$1.36\ 10^{-4}$

Tab.4b

$M = 1000\ M_{\odot}$

μ	r	T	T_{eff}	r_E	$\tau'_{eff}\, r$	L	L_{eff}
100	$5.28\ 10^3$	$1.10\ 10^4$				$1\text{-}2\ 10^{-6}$	
300	$1.97\ 10^3$	$1.0\ 10^4$	$7.14\ 10^3$	$8.48\ 10^2$	3.38	$4\text{-}5\ 10^{-6}$	$3.32\ 10^{-6}$
500	$3.64\ 10^3$	$1.0\ 10^4$	$7.43\ 10^3$	$9.48\ 10^2$	4.14	$1\ 2\ 10^{-5}$	$1.77\ 10^{-5}$
700	$5.45\ 10^3$	$1.0\ 10^4$	$6.00\ 10^3$	$1.53\ 10^3$	4.74	$1\text{-}2\ 10^{-5}$	$1.11\ 10^{-5}$
900	$7.37\ 10^3$	$1.0\ 10^4$	$5.78\ 10^3$	$1.75\ 10^3$	5.24	$2\text{-}3\ 10^{-5}$	$1.55\ 10^{-5}$
1000	$8.37\ 10^3$	$1.0\ 10^4$	$5.83\ 10^3$	$2.13\ 10^3$	5.47	$3\text{-}4\ 10^{-5}$	$1.69\ 10^{-5}$
1100	$9.38\ 10^3$	$1.0\ 10^4$	$5.51\ 10^3$	$1.77\ 10^3$	5.68	$3\text{-}4\ 10^{-5}$	$1.78\ 10^{-5}$
3000	$3.13\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$4.51\ 10^3$	$3.13\ 10^3$	8.48	$1\text{-}2\ 10^{-4}$	$5.78\ 10^{-5}$
5000	$5.77\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$4.17\ 10^3$	$5.60\ 10^3$	10.12	$4\text{-}5\ 10^{-4}$	$1.58\ 10^{-4}$
7000	$8.64\ 10^4$	$1.0\ 10^4$	$3.84\ 10^3$	$4.88\ 10^3$	11.94	$7\text{-}8\ 10^{-4}$	$1.19\ 10^{-4}$

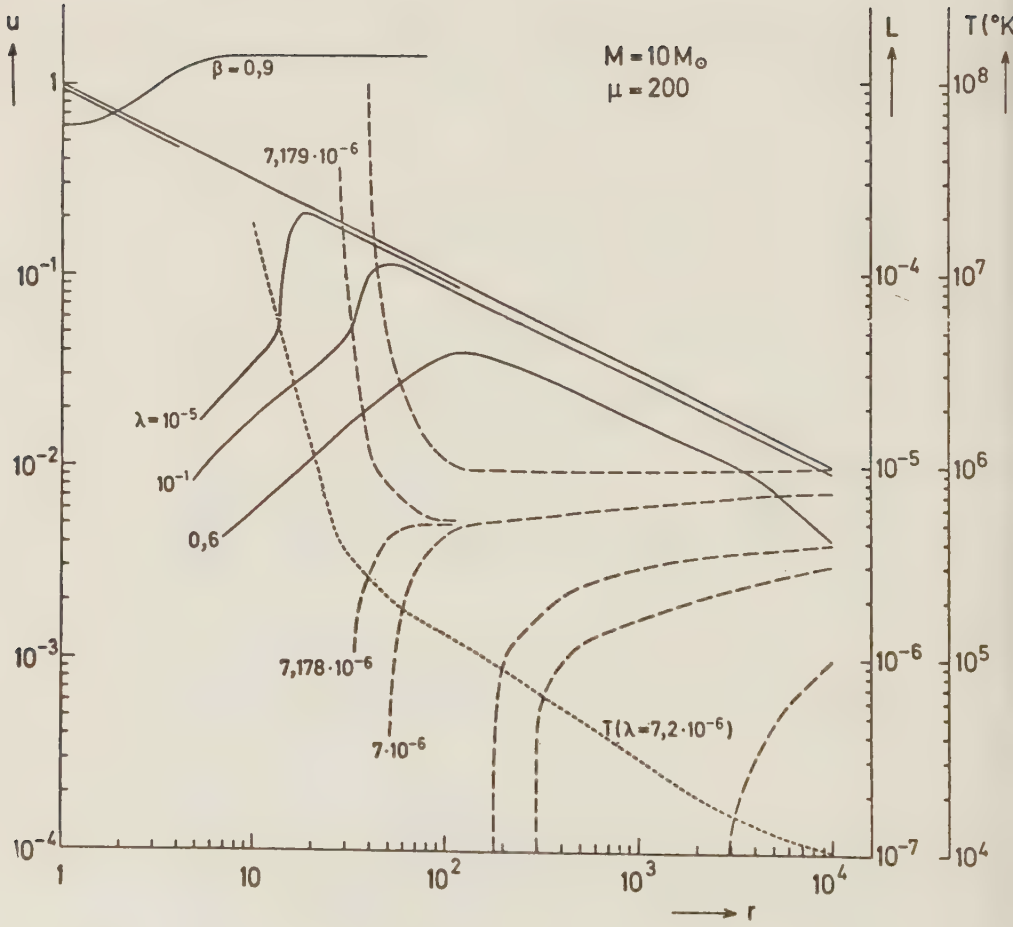


Abb.1

Gestrichelte Kurven: Leuchtkraft L (im 'mitbewegten' System), durchgezogene Kurven: Geschwindigkeit $u = -\frac{dr}{ds}$ für verschiedene Werte der Leuchtkraft λ bei $r = \tilde{r}_o$.

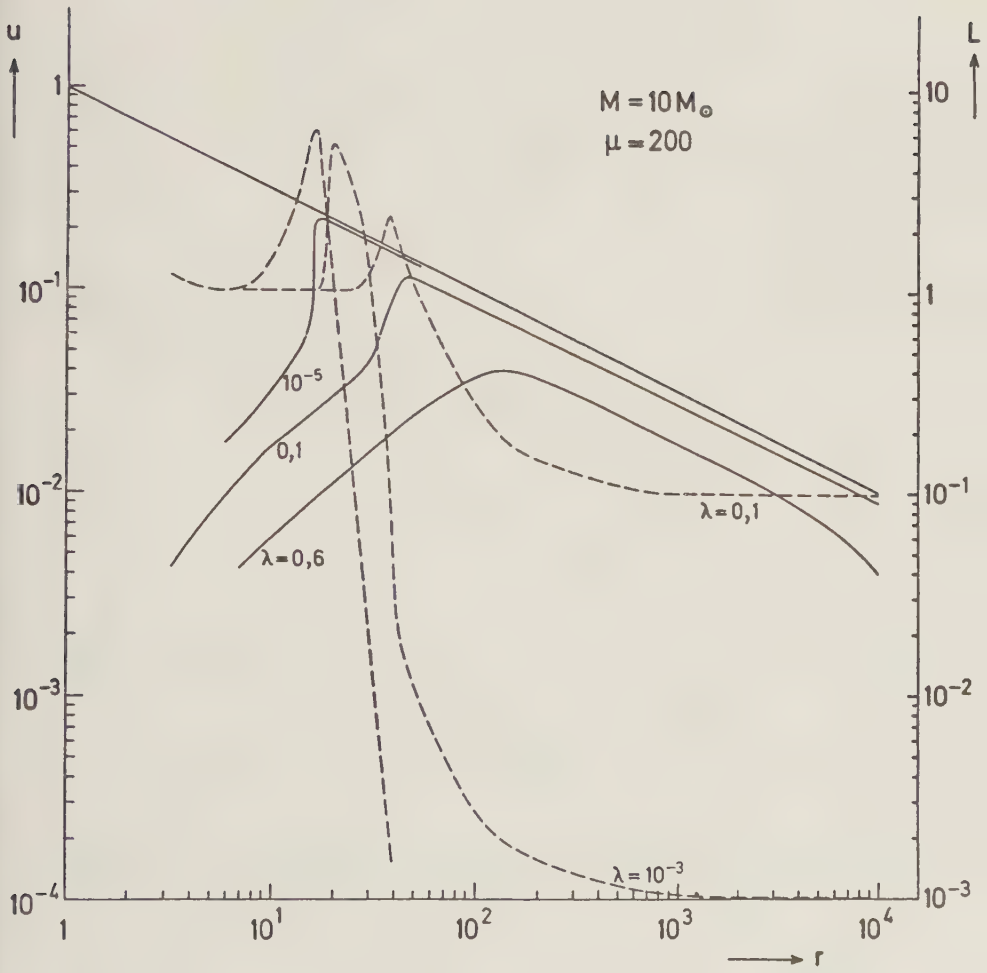


Abb. 2

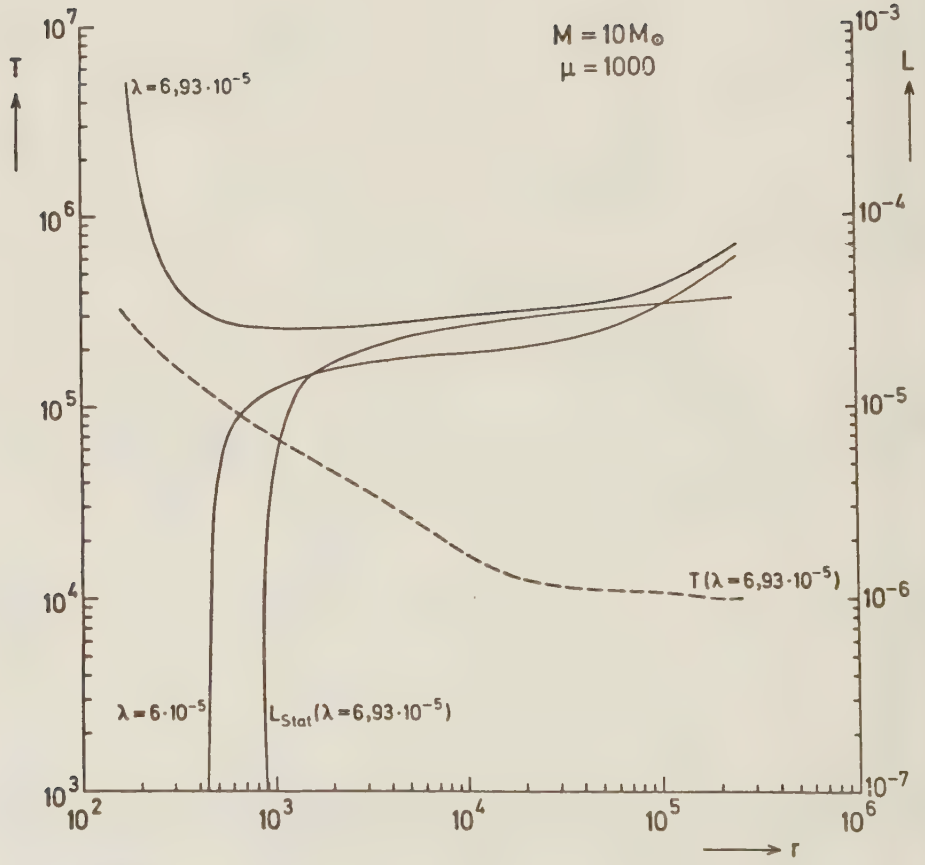

M = 10 M⊙
μ = 1000
λ = 6,93 · 10⁻⁵
λ = 6 · 10⁻⁵
L_Stat (λ = 6,93 · 10⁻⁵)
T (λ = 6,93 · 10⁻⁵)
T
L
r
10⁷
10⁶
10⁵
10⁴
10³
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
10⁻⁶
10⁻⁷
10²
10³
10⁴
10⁵
10⁶

Abb.3

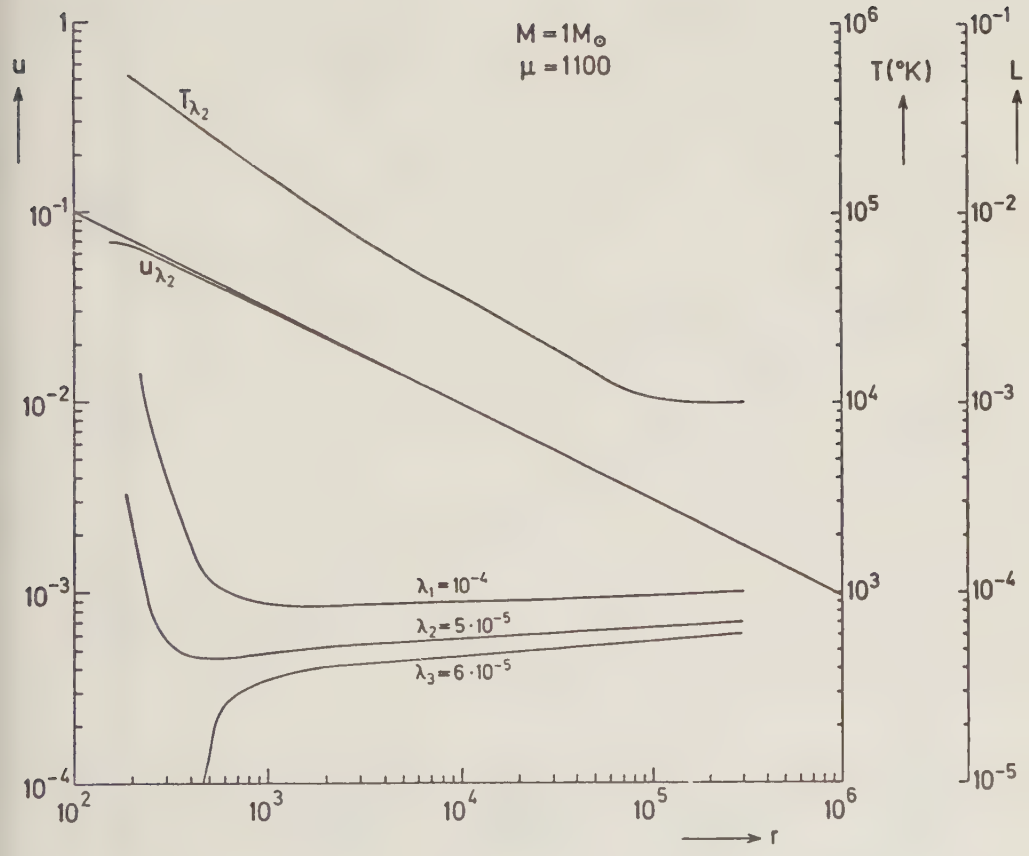

M = 1M⊙
μ = 1100
u
T(°K)
L
r
T_{λ_2}
u_{λ_2}
$\lambda_1 = 10^{-4}$
$\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-5}$
$\lambda_3 = 6 \cdot 10^{-5}$
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{6}
10^{5}
10^{4}
10^{3}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}

Abb.4a

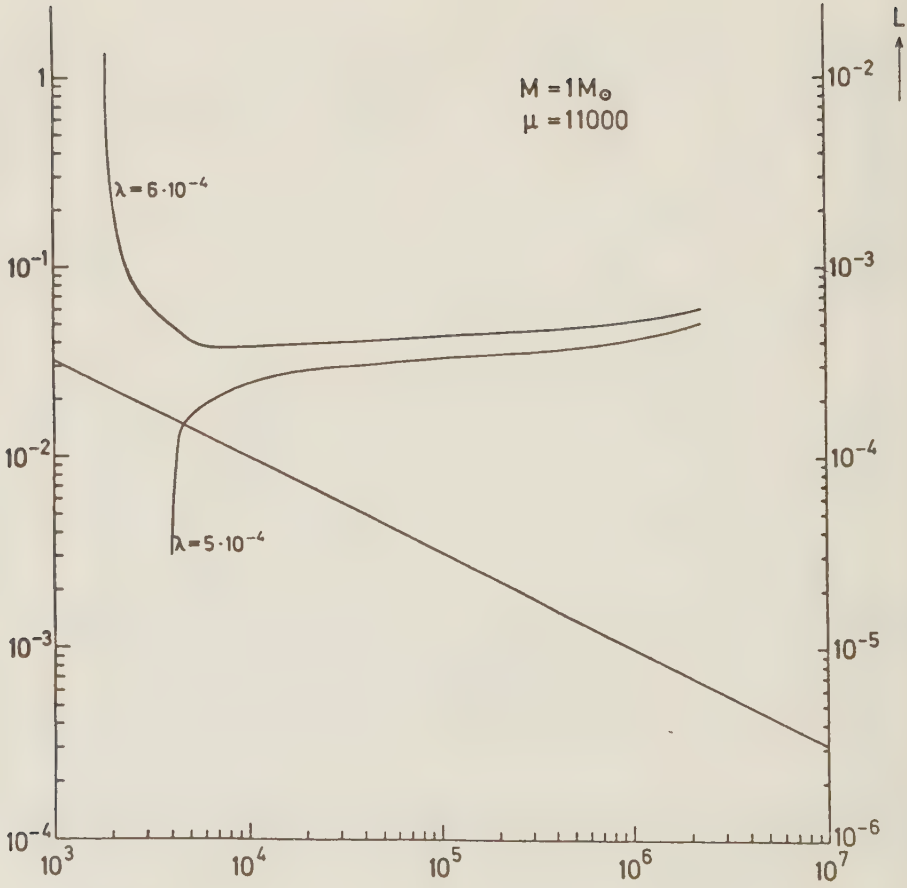

M = 1M⊙
μ = 11000
λ = 6·10⁻⁴
λ = 5·10⁻⁴
L
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
10⁻⁶
10³
10⁴
10⁵
10⁶
10⁷

Abb.4b

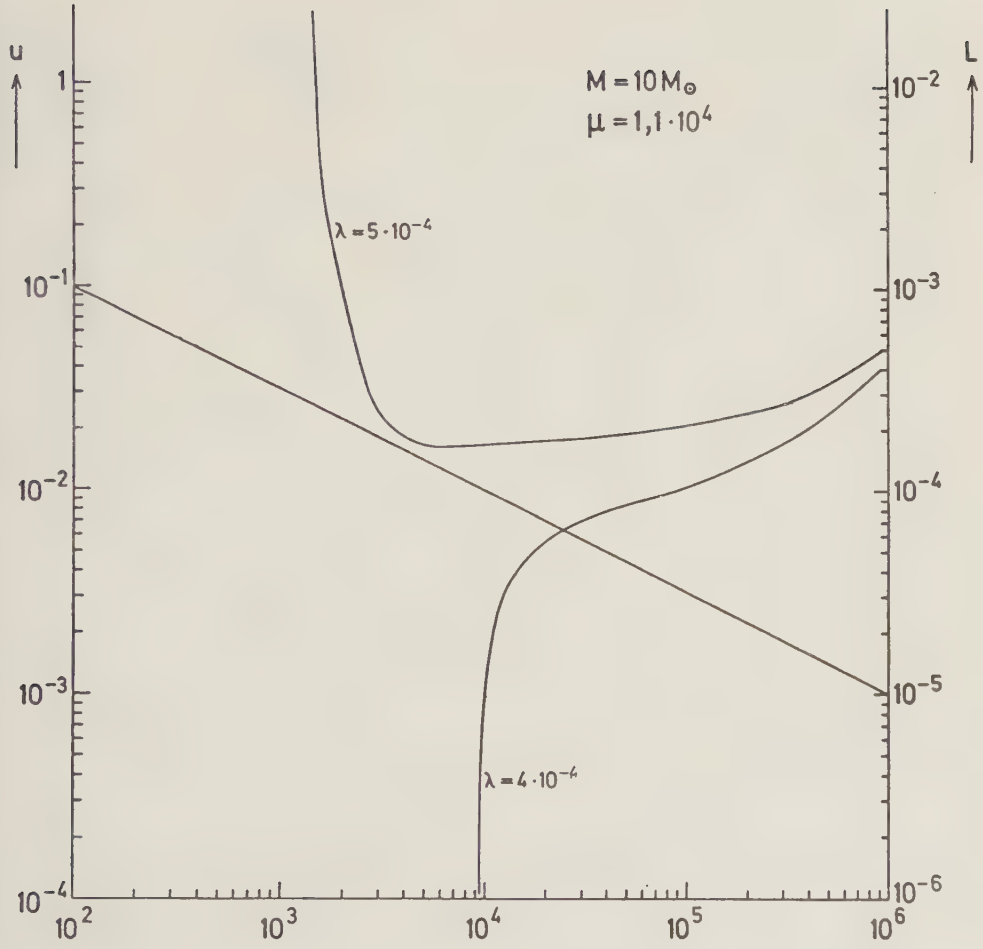

u
L
M = 10 M⊙
μ = 1,1 · 10^4
λ = 5 · 10^-4
λ = 4 · 10^-4
1
10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
10^-2
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6

Abb.5b

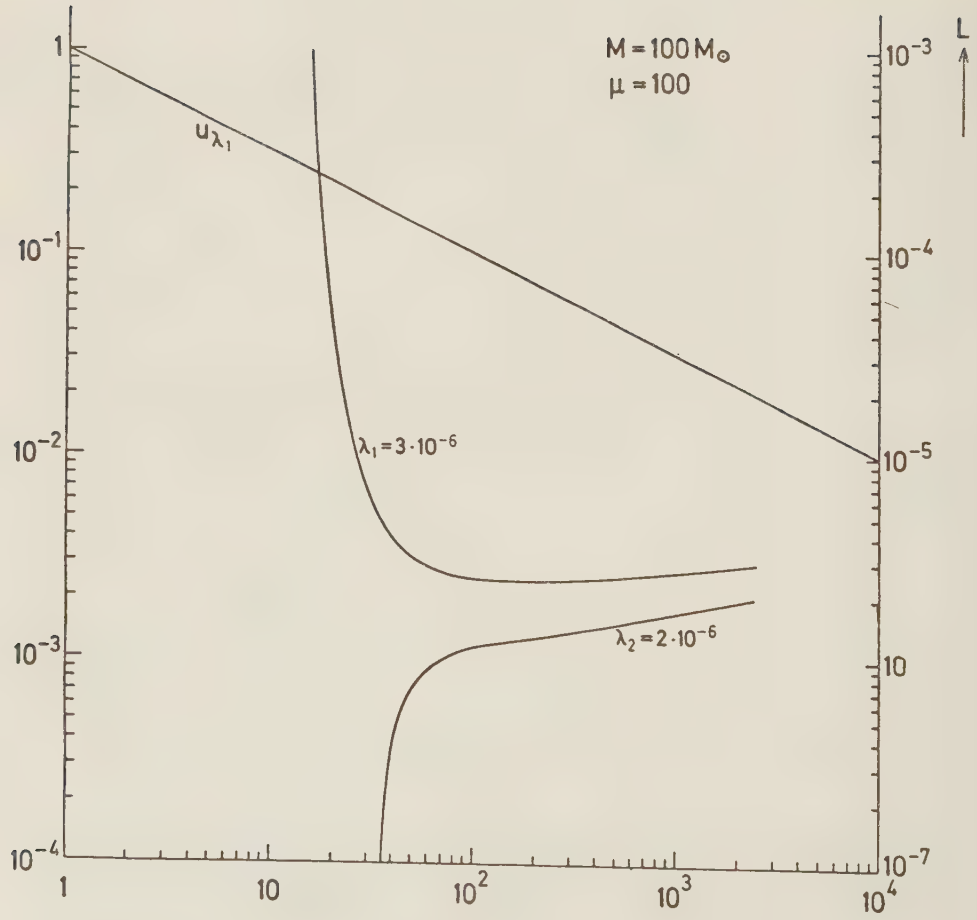

M = 100 M⊙
μ = 100
L
u_{λ_1}
$\lambda_1 = 3 \cdot 10^{-6}$
$\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-6}$
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10
10^{-7}
1
10
10^2
10^3
10^4

Abb.6a

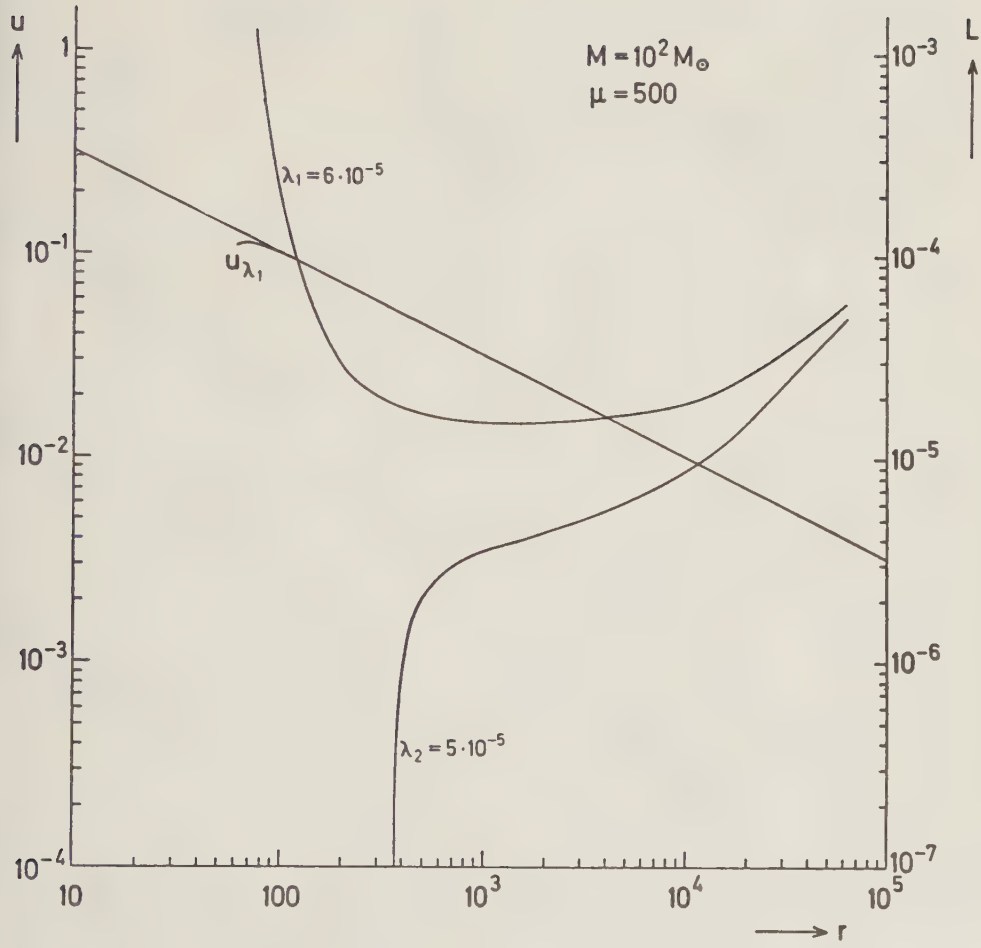

u
L
M = 10² M⊙
μ = 500
λ1 = 6·10⁻⁵
uλ1
λ2 = 5·10⁻⁵
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
10⁻⁶
10⁻⁷
10
100
10³
10⁴
10⁵
r

Abb.7a

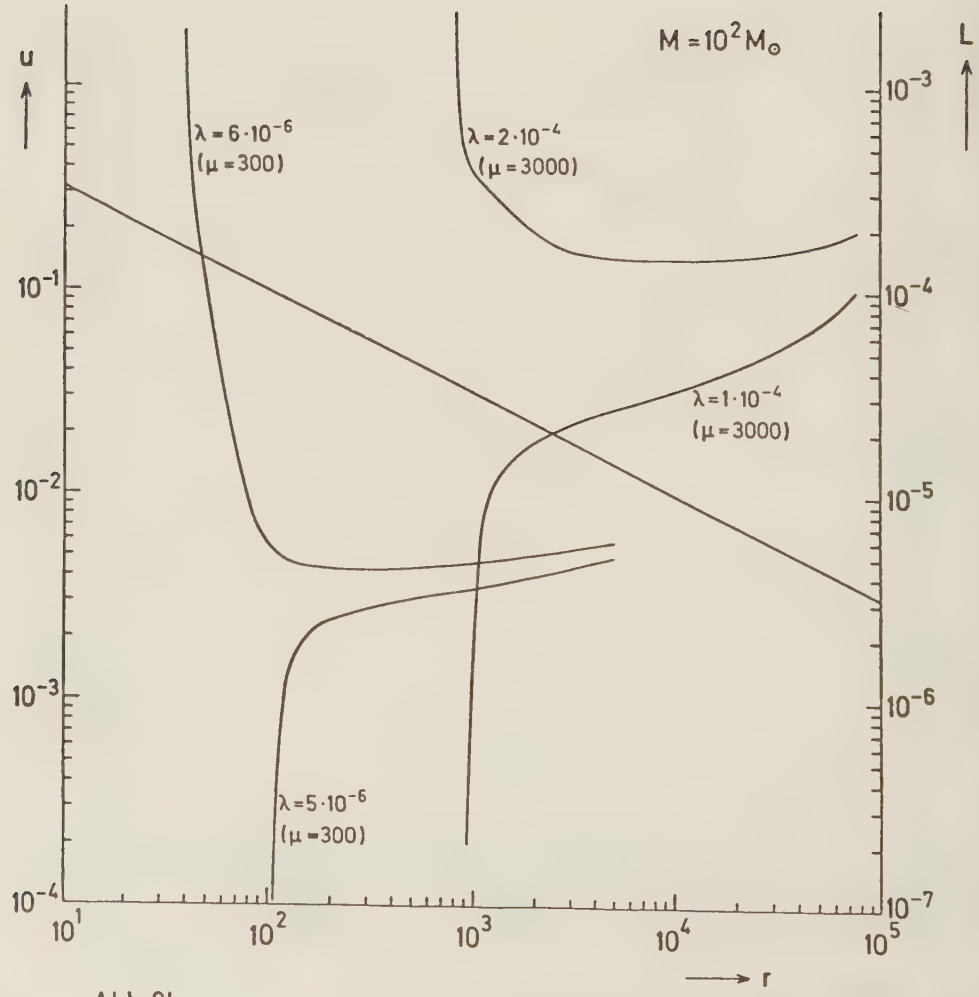

M = 10² M⊙
u
L
λ = 6·10⁻⁶
(μ = 300)
λ = 2·10⁻⁴
(μ = 3000)
λ = 1·10⁻⁴
(μ = 3000)
λ = 5·10⁻⁶
(μ = 300)
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
10⁻⁶
10⁻⁷
10¹
10²
10³
10⁴
10⁵
r

Abb.8b

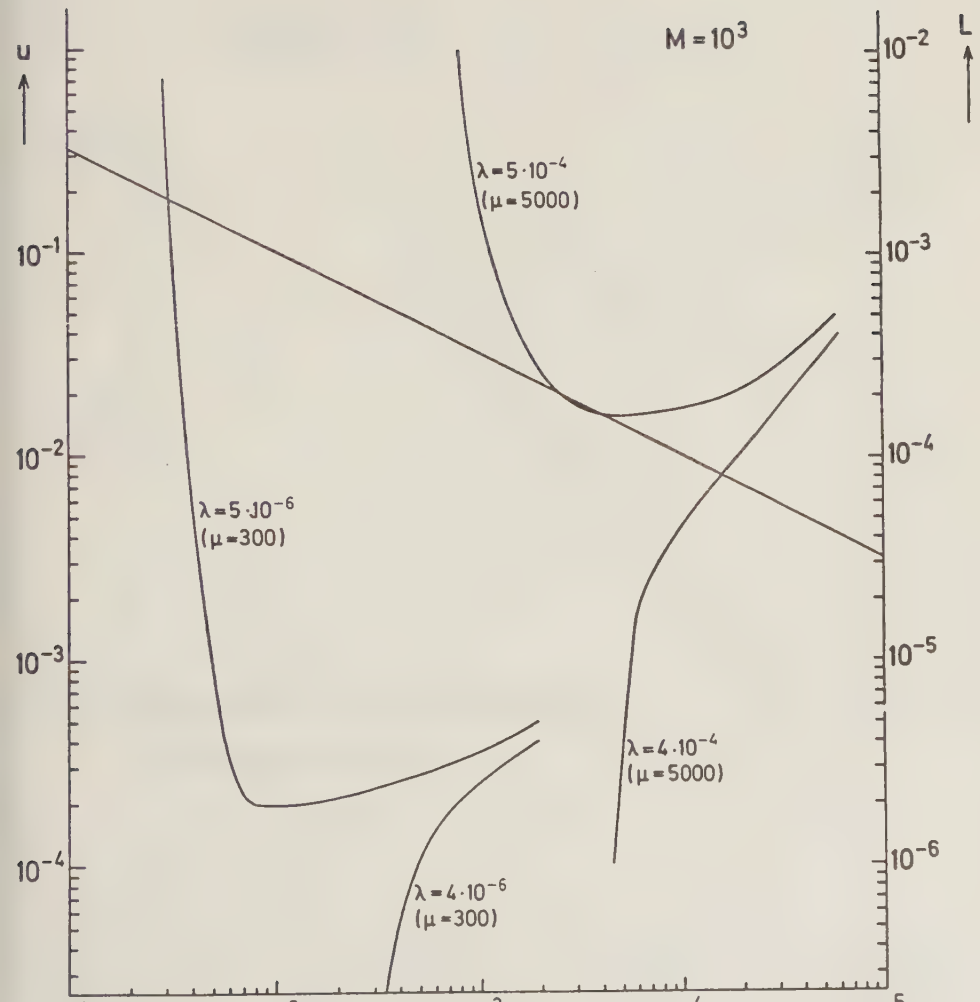

M = 10^3
u
L
λ=5·10^-4
(μ=5000)
λ=5·10^-6
(μ=300)
λ=4·10^-4
(μ=5000)
λ=4·10^-6
(μ=300)
10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
10^-2
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5

Abb.9b

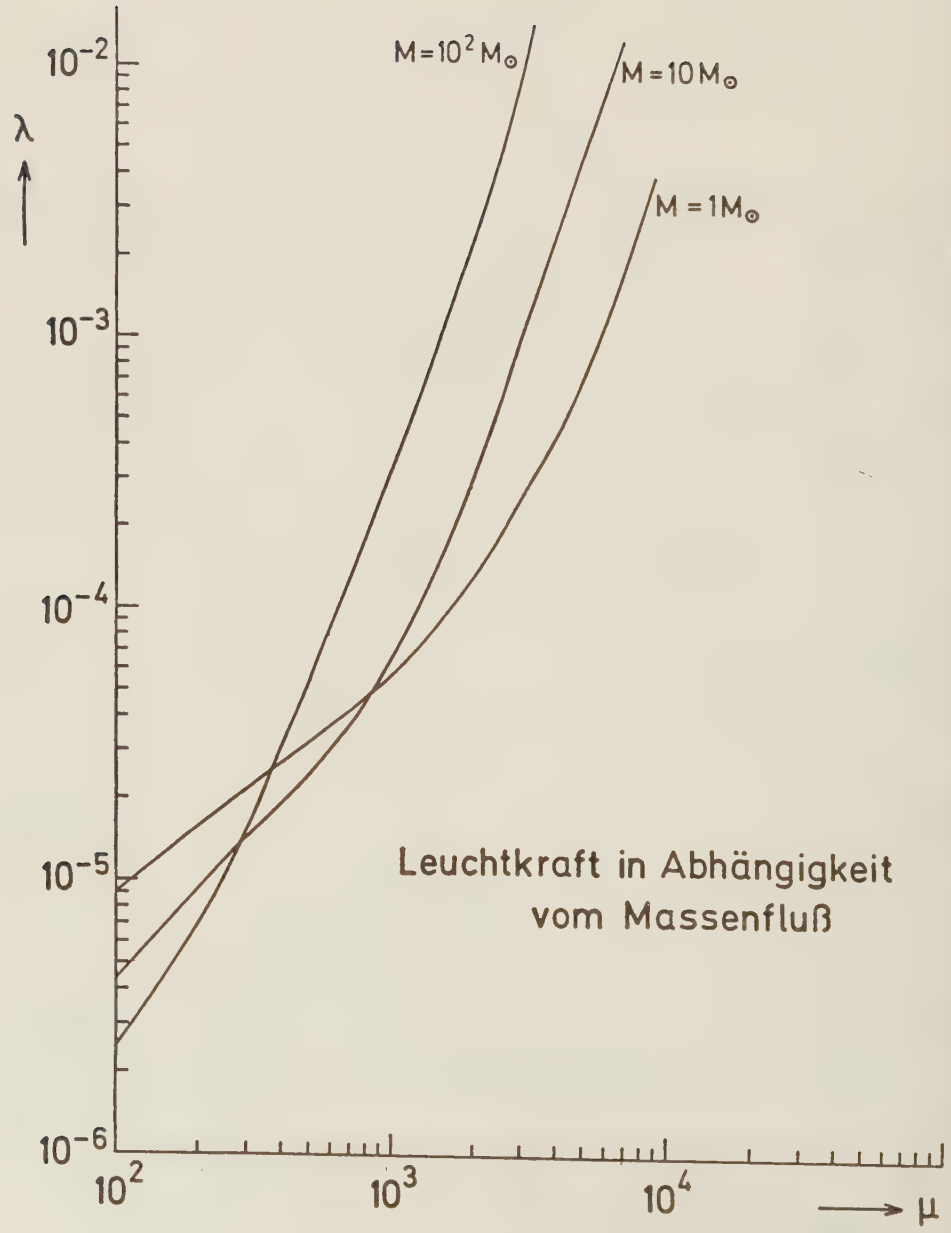

10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
λ
$M=10^2 M_\odot$
$M=10 M_\odot$
$M=1 M_\odot$
Leuchtkraft in Abhängigkeit
vom Massenfluß
10^2
10^3
10^4
μ

Abb.10a

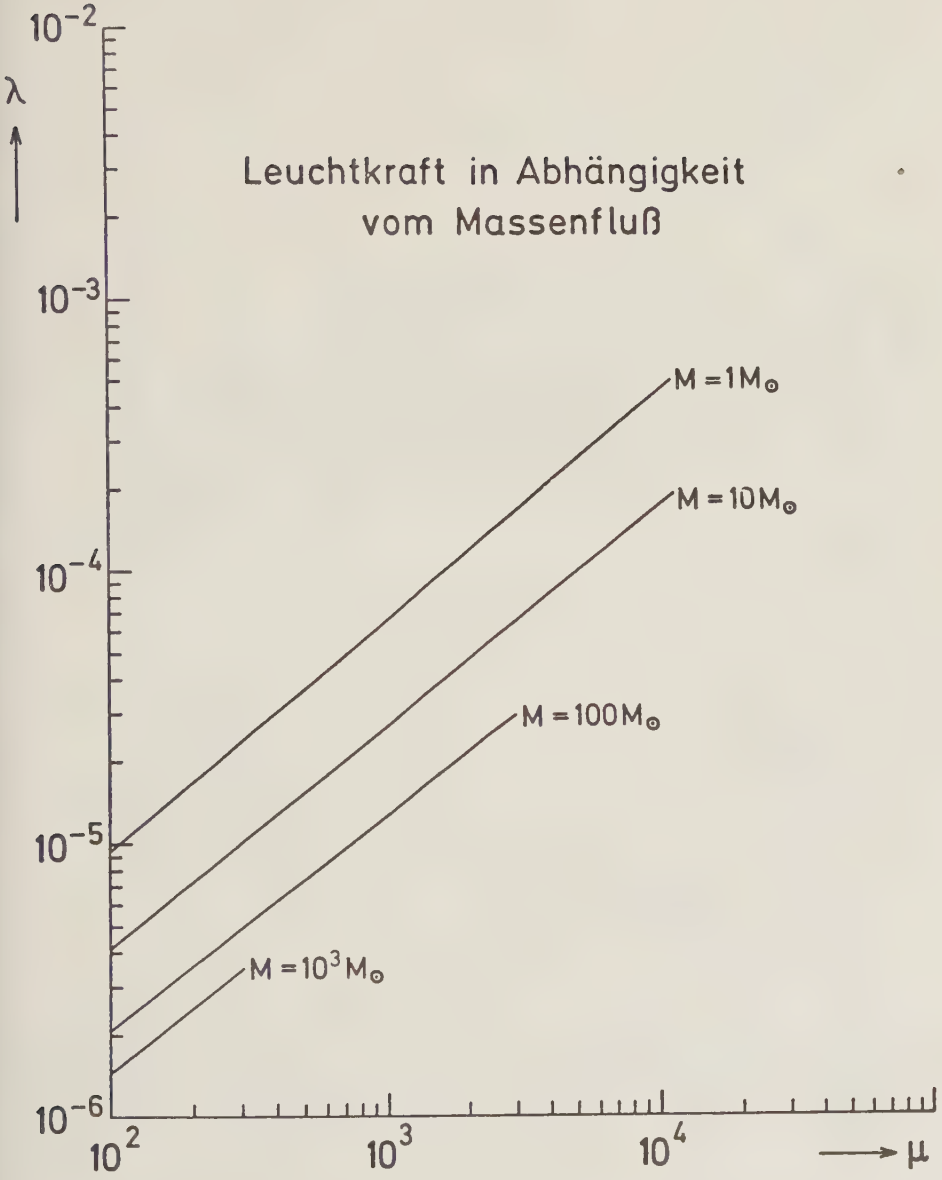

Leuchtkraft in Abhängigkeit
vom Massenfluß
λ
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
μ
M = 1 M⊙
M = 10 M⊙
M = 100 M⊙
M = 10^{3} M⊙

Abb.10b

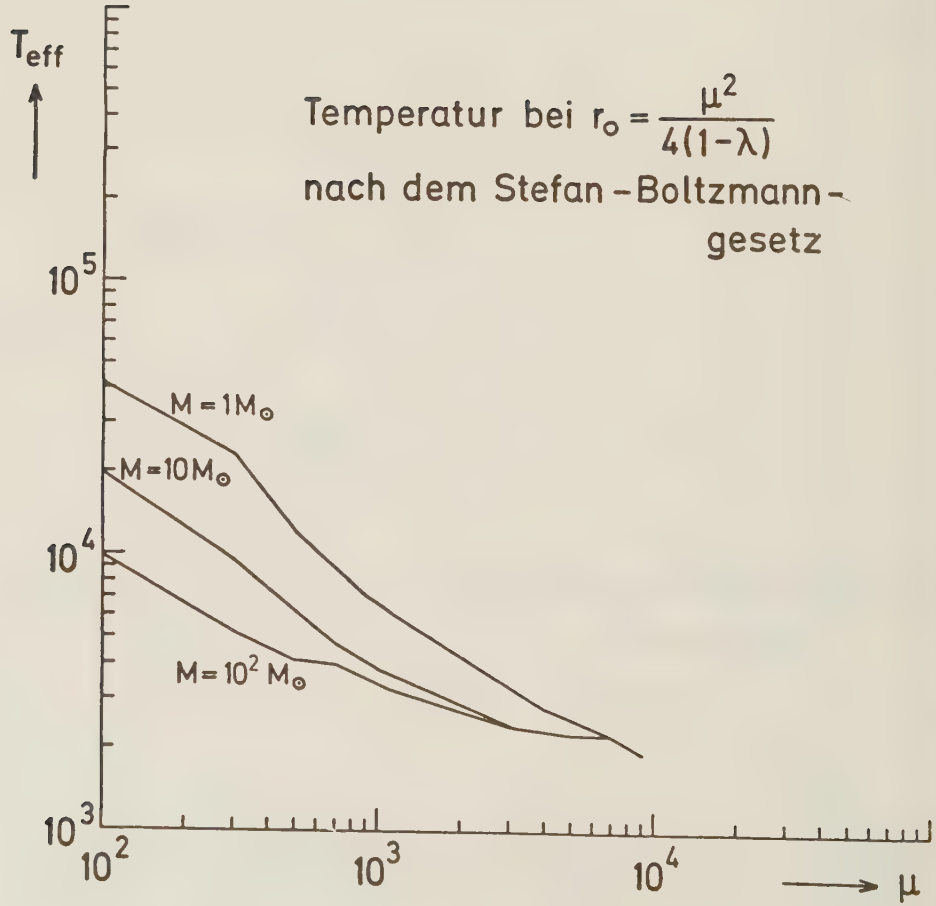

T_{eff}
Temperatur bei $r_o = \frac{\mu^2}{4(1-\lambda)}$
nach dem Stefan-Boltzmann-gesetz
10^5
10^4
10^3
$M = 1 M_\odot$
$M = 10 M_\odot$
$M = 10^2 M_\odot$
10^2
10^3
10^4
μ

Abb.11a

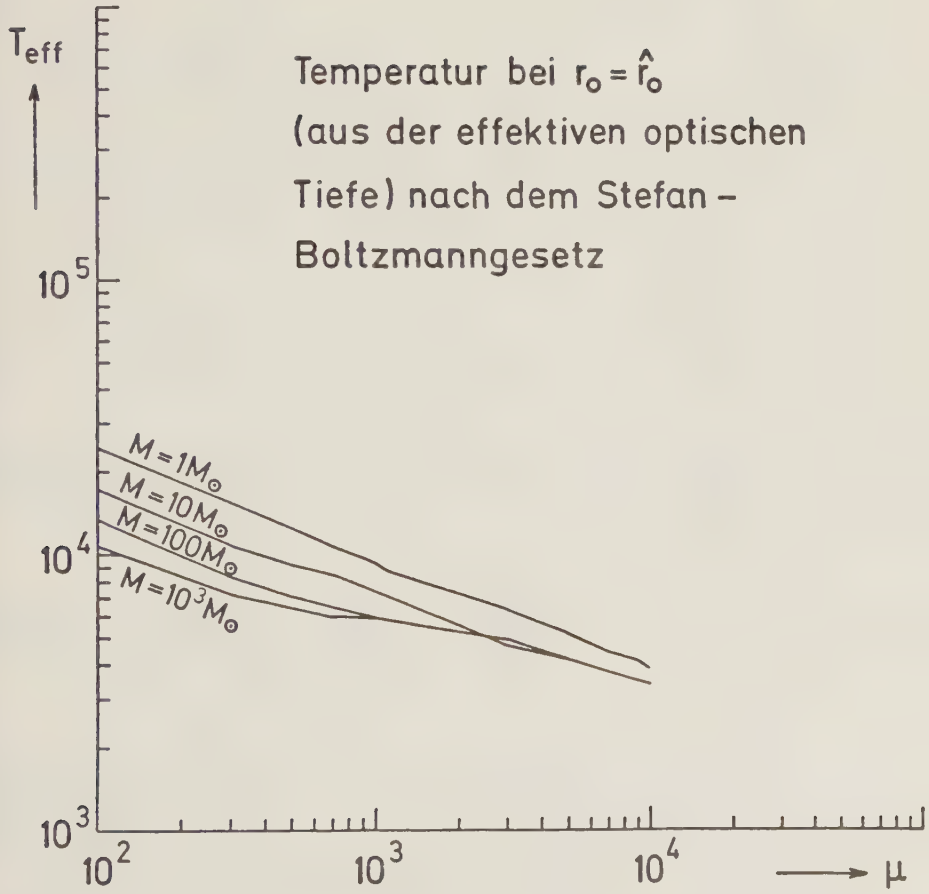

T_{eff}
Temperatur bei $r_o = \hat{r}_o$
(aus der effektiven optischen
Tiefe) nach dem Stefan –
Boltzmanngesetz
10^5
10^4
10^3
$M = 1M_\odot$
$M = 10M_\odot$
$M = 100M_\odot$
$M = 10^3M_\odot$
10^2
10^3
10^4
μ

Abb.11b

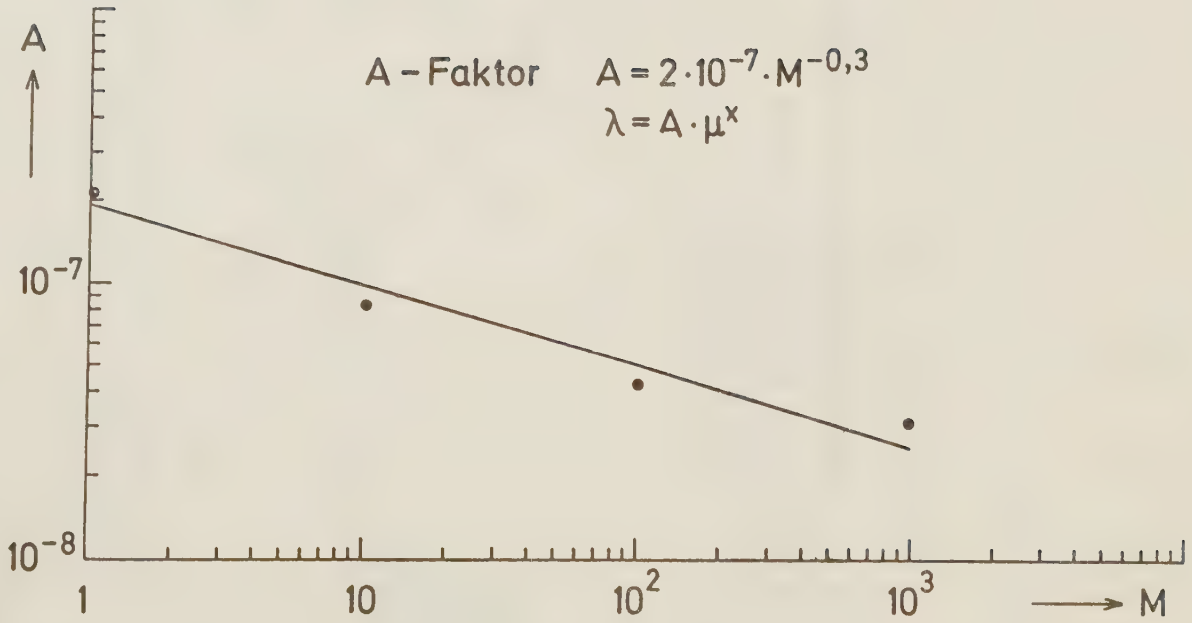

A
A – Faktor
$A = 2 \cdot 10^{-7} \cdot M^{-0,3}$
$\lambda = A \cdot \mu^x$
10^{-7}
10^{-8}
1
10
10^2
10^3
M

Abb.12

Anhang A

In unseren Einheiten ($L_E = r_s = c = 1$) lautet die Kontinuitätsgleichung und die Impulserhaltungsgleichung:

$$4\pi r^2 \varrho u = \mu \tag{A1}$$

$$\frac{1}{2}(u^2 - \frac{1}{r})' = \frac{\lambda}{2r^2} - \frac{p'}{\varrho} \qquad (\lambda = L_\infty) . \tag{A2}$$

Da die Strömung isotherm verläuft, gilt

$$p \propto \varrho \qquad \text{oder} \quad p = \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} \varrho .$$

Aus (A1) und (A2) erhält man

$$\begin{array}{lll} u' & (\varrho r^2) + \varrho' & (r^2 u) = -2r \varrho u \\ u' & (u) \quad \varrho' & (\frac{p}{p_\infty} \varrho^{-1}) = (\lambda - 1)/2r^2 . \end{array}$$

Der kritische Punkt liegt an der Stelle, bei der die Determinante des Systems verschwindet, also

$$\det \begin{bmatrix} \varrho r^2 & r^2 u \\ u & \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} \frac{1}{\varrho} \end{bmatrix} = 0 ,$$

oder

$$u^2 = \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} = a^2 . \tag{A3}$$

wobei a die isotherme Schallgeschwindigkeit ist.
Damit das Gleichungssystem an dieser Stelle lösbar ist, muß

$$\det \begin{bmatrix} \varrho r^2 & -2r \varrho u \\ u & (\lambda - 1)/2r^2 \end{bmatrix} = 0$$

gelten, also

$$u^2 = \frac{1 - \lambda}{4r} . \tag{A4}$$

Aus Gleichung (A2) folgt

$$\frac{1}{2}(u^2)' = \left(\frac{1-\lambda}{2r} - \frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\ln\varrho\right)',$$

also

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\ln\varrho = \frac{1-\lambda}{2r} + \frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\ln\varrho_\infty,$$

oder

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\ln\frac{\varrho}{\varrho_\infty} = \frac{1-\lambda}{2r} \qquad \text{(A5)}$$

(A1), (A3), (A4), (A5) ist ein System von 4 Gleichungen für die Unbekannten r, u, ϱ und μ. Daraus läßt sich μ berechnen. Man erhält

$$\mu = \frac{e^{3/2}}{4}\varrho_\infty a^{-3}(1-\lambda)^2 \qquad (e = 2.71....)$$

$$\approx 3.5\,\varrho_\infty\, a^{-3}(1-\lambda)^2,$$

oder, wenn wir ϱ_∞ durch die dimensionierte Anzahldichte der Protonen n_∞ (in cm^{-3}) ausdrücken:

$$\mu = 1.09\cdot 10^{-19}\, a^{-3}(1-\lambda)^2 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{T[^oK]}{10^4}\right) n_\infty\, cm^{-3}$$

$$= 1.38\cdot 10^2 \left(\frac{n_\infty[cm^{-3}]}{10^8}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{T[^oK]}{10^4}\right)(1-\lambda)^2$$

Anhang B

Adiabatische Schallgeschwindigkeit eines Mediums mit thermischer Energie und Strahlungsenergie.

Aus

$$p = \varkappa_2 \varrho T + \frac{1}{3} aT^4 \tag{B1}$$

und

$$\epsilon = \varrho + \varkappa_1 \varrho T + aT^4 \tag{B2}$$

erhält man

$$-dp + (\varkappa_2 T)d\varrho + (\varrho \varkappa_2 - \frac{4aT^3}{3})dT = 0, \tag{B3}$$

bzw.

$$-d\epsilon + (1 + \varkappa_1 T)d\varrho + (\varrho \varkappa_1 + 4aT^3)dT = 0 . \tag{B4}$$

Ersetzt man in (B4) dT mit Hilfe von (B3), so folgt:

$$-d\epsilon(\varrho \varkappa_2 + \frac{4aT^3}{3}) + d\varrho(\varrho \varkappa_2 + \frac{4aT^3}{3} + (\frac{4a\varkappa_1}{3} - 4a\varkappa_2)T^4) + (\varrho \varkappa_1 + 4aT^3)dp = 0 . \tag{B5}$$

Damit kann man im 1. Hauptsatz für adiabatische Zustandsänderungen

$$d\epsilon - \frac{\epsilon + p}{\varrho} d\varrho = 0 \tag{B6}$$

$d\varrho$ eliminieren und erhält für die Schallgeschwindigkeit s:

$$s^2 = \frac{dp}{d\epsilon} = \frac{p_{th}(\epsilon_{th} + 4U) - (p_{th} + \frac{4}{3}U)(\varrho + \epsilon_{th})}{(\epsilon + p)(\epsilon_{th} + 4U)} + \frac{(p_{th} + \frac{4}{3}U)}{(\epsilon_{th} + 4U)}, \tag{B7}$$

mit

$$\epsilon_{th} = \varrho \varkappa_1 T \ , \ p_{th} = \varrho \varkappa_2 T \ , \ U = aT^4 \ .$$

Anhang C

In der nichtrelativistischen Physik folgt aus der Fouriergleichung

$$q = - \frac{c}{3 \kappa_S \varrho} \text{ grad } U \tag{C1}$$

(κ_S : Absorptionskoeffizient, $U = a T^4$: Strahlungsenergiedichte)
$\vec{q}$: 'räumlicher' Wärmestrom)

und der Erhaltungsgleichung für die Wärme

$$\dot{U} + \text{div } \vec{q} = 0 \quad , \quad (\dot{(\ )} := \frac{d}{dt}(\ )) \ , \tag{C2}$$

eine parabolische Wärmeleitungsgleichung.

Relativistisch entspricht der Gleichung (C1) die Gleichung (V.8):

$$q^k \left(1 + \frac{1}{\varrho \kappa} u^b{}_{;b}\right) + \frac{1}{\varrho \kappa} \dot{q}^k =$$

$$= \frac{1}{\varrho \kappa} \left(u^k a_l q^l - q^l u^k{}_{;l}\right) - \frac{1}{\varrho \kappa} P^{bk} \left(\frac{4}{3} U a_b + \frac{1}{3} U_{,b}\right), \tag{C3}$$

wobei

$$a_b := u_{b;k} u^k \quad , \quad q^b = q^b{}_{;k} u^k$$

gilt.

Die relativistische Verallgemeinerung von Gleichung (C2) erhält man aus der Energiebilanzgleichung

$$T^{ab}{}_{;b} \, u_a = 0 \quad .$$

Mit dem Energie-Impulstensor T^{ab} nach Gleichung (IV.12) gilt also:

$$q^b{}_{;b} = q^a a_a - u^b \left((\varrho + \epsilon_{th} + U)_{,b} - (\varrho + \epsilon_{th} + p_{th} + \frac{4}{3} U) \frac{n_{,b}}{n} \right) . \tag{C4}$$

(n : Anzahldichte der Protonen
$\epsilon_{th} = \varkappa_1 \varrho T$: thermische Energie
$p_{th} = \varkappa_2 \varrho T$: thermischer Druck.)

Bildet man in Gleichung (3) die Divergenz, so erhält man

$$q^k{}_{;b;k} u^b + p^{bk} \frac{1}{3} U_{,b;k} = H_1 \quad , \tag{C5}$$

wobei H_1 eine Funktion von $q_k, \varrho, u_k, u_{k;b}, U$, und der ersten Ableitung dieser Größen ist.

Aus Gleichung (C4) folgt

$$q^k{}_{;k;b} = -u^k (\varrho + \epsilon_{th} + U)_{;k;b} + H_2 \quad .$$

Die Funktion H_2 hängt von den Größen $q_k, \varrho, u_k, u_{k;b}, \epsilon_{th}, p_{th}$, U und deren ersten Ableitungen ab. Da die Vertauschung der der kovarianten Ableitungen von $q^k{}_{;k;b}$ nur zusätzliche erste Ableitungen in q_k ergibt, folgt daraus:

$$q^k{}_{;b;k} = -u^k (\varrho + \epsilon_{th} + U)_{,b;k} + H_3 \quad . \tag{C6}$$

Aus Gleichung (C5) und (C6) erhält man

$$u^k u^b \, (\varrho + \epsilon_{th} + U)_{,b;k} - p^{bk} \frac{1}{3} U_{,b;k} = H_4 \quad ,$$

oder

$$\ddot{\varrho} + \ddot{\epsilon}_{th} + \ddot{U} - \frac{1}{3} \Delta U = H_5$$

wobei Δ der räumliche Laplaceoperator im lokalen Ruhesystem der Materie ist.

Mit $\epsilon_{th} = \tau_1 \zeta T$, $U = aT^4$, folgt schließlich

$$\ddot{T} - \frac{4U}{(\epsilon_{th} + 4U)3} \Delta T = H_6. \qquad (C7)$$

H_6 hängt über die zweiten Ableitungen von der Dichte ζ und der Geschwindigkeit u^k impliziert von den zweiten Ableitungen von T ab. Vernachlässigt man diese Abhängigkeit, so folgt aus der hyperbolischen Wärmeleitungslgeichung (C7) die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\beta^2 = \frac{4U}{(\epsilon_{th} + 4U)3} \approx \frac{1}{3} \qquad (C8)$$

falls $U \gg \epsilon_{th}$.

Die Singularität des vollständigen Systems der hydrodynamischen Gleichungen und der Fouriergleichung ist nach Gl. (VII.1) durch

$$(e\,\beta^2 - p_{th})(\beta^2 - \frac{4}{3}\frac{U}{(\epsilon_{th} + 4U)}) - \frac{p_{th}^2\beta^2 + 2p_{th}q\beta(\beta^2-1)}{\epsilon_{th} + 4U} = 0 \qquad (C9)$$

gegeben. Da der zweite Term wesentlich kleiner als der Produktterm ist, fällt die eine Nullstelle von Gl. (C9) mit der durch Gl. (C8) gegebenen Geschwindigkeit praktisch zusammen, die Abweichung rührt von der Vernachlässigung der impliziten Temperaturabhängigkeit der H_i-Funktion bei der Ableitung von Gleichung (C8) her.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Rees, M.J. (1974) in: Gravitation and Radiation and Gravitational Collapse (1974 IAU)
[2] Shakura, N.J. (1972) Astr. Zh. 49, 945
[3] Pringle, J.E. u. Rees, M.J. (1972) A.u.A. 21, 1
[4] Shakura, N.J. u. Sunyaev, R.A. (1975) A.u.A. 24, 337
[5] Illarionov, A.F. u. Sunyaev, R.A. (1975) A.u.A. 39, 185
[6] Mészáros, P. u. Rees, M.J. (1975) Bull. AAS, 7, 242
[7] Pringle, J.E. u. Rees, M.J. (1975) M.N.R.A.S. 172, 493
[8] Bath, G.T. (1977) M.N.R.A.S. 178, 203
[9] Hoyle, F. u. Lyttleton, R.A. (1939) Proc.Camb.Phil.Soc. 35, 405
[10] ———————————— (1940) Proc.Camb.Phil.Soc. 36, 325
[11] ———————————— (1940) Proc.Camb.Phil.Soc. 36, 424
[12] Bondi, H. u. Hoyle, F. (1944) M.N.R.A.S. 104, 273
[13] Zel'dovich, Ya.B. (1974) Sov. Ph.-Dokl. 9, 195
[14] Salpeter, E.E. (1964) Astr. J. 140, 796
[15] Lynden-Bell, O. (1969) Nature 223, 690
[16] Shapiro, S.L. (1973) Ap.J. 180, 531
[17] Shapiro, S.L. (1973) Ap.J 185, 69
[18] Shvartsman, U.F. (1971) Sov. Astr. 15, 377
[19] Buff, J. u. McCray, R. (1974) Ap. J. 189, 147
[20] Schmid-Burgk, J. (1978) Astr. u. Space Sc. 191
[21] Mészáros, P. (1975) Nature 258, 583
[22] Mészáros, P. (1975) A.u.A. 44, 59
[23] Maraschi, L., Reina, C., Treves, A. (1974) Astr. Ap. 35, 389
[24] Shapiro, S.L. u. Salpeter, E.E. (1975) Ap. J. 198, 671
[25] Vitello, P.A.J. (1978) Ap. J. 225, 694
[26] De Gregoria, A.J. (1974) Ap. J. 189, 555
[27] Tamazawa, S., Kiyotaka, T., Noboru, K. u. Yoro, O. (1975) Astr. Space Sci. 32, 403
[28] Kafka, P. u. Mészáros, P. (1976) Gen.Rel.Grav. 7, 841
[29] Begelman, M.C. (1979), M.N.R.A. 187, 237
[30] Bondi, H. (1952) M.N.R.A.S. 112, 195
[31] Eckart, C. (1940), Phys. Rev. 58, 919
[32] Lindquist, R. (1966), Ann. of Phys. 37, 487

[33] Cassinelli, J.P. u. Castor, J.I. (1973) Ap.J. 179, 183
[34] Felton, J.E. u. Rees, M.J. (1972) A.u.A. 17, 226
[35] Shkarofsky, I.P., Johnston, T.W. u. Bachynski, M.P. (1966) 'The Particle Kinematics of Plasmas'(Mass.:Add.Wesly)
[36] Pikel'ner, S.B. (1961) Foundations of Cosmical Electrodynamics (Moskau: Fizmatgiz)
[37] Novikov, I.D. u. Thorne, K.S. (1972) in: Black Holes, ed.: B. De Witt u. C. De Witt (New York: Gordon and Breach)
[38] Ehlers, J. (1971) General Relativity and Kinetic Theory, in: Relatività Generale e Cosmologia, ed.: B.K. Sachs; (New York: Academic Press)
[39] Ehlers, J. (1974) Lectures in Statistical Physics, ed.: W.C. Schieve u. J.S. Turner (Berlin, Heidelberg, New York: Springer)
[40] Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A. (1973) Gravitation, (San Francisco: Freeman and Comp.)
[41] Landau, L.D. u. Lifschitz, E.M. (1974) Hydrodynamik, (Berlin: Akademie-Verlag)
[42] Cattaneo, C. (1958) Compt. Rend. 247, 431
[43] Vernotte, P. (1958) Compt. Rend. 246, 3154
[44] Kranyš, M. (1966) Nuovo Cimento XLII B, N.1, 51
[45] ———— (1967) Nuovo Cimento LB, N.1, 49
[46] Chandrasekhar, S. (1939) in: An Introduction to Stellar Structure, Capt. V (Dover)
[47] Tolman, R.C. (1934) in: Thermodynamics and Cosmology, (Oxford: Clarendon Press)
[48] Michel, F.C. (1972) Astroph. and Space Sci. 15, 159
[49] Blumenthal, G.R, Mathews, N.G. (1976) Ap. J. 203, 714
[50] Pringle, J. (1977) priv. comm.

Für die Anregung der Arbeit und für zahlreiche Aufmunterungen danke ich Herrn Dr.G.Börner,ebenso Herrn Prof.Dr.J.Ehlers für wertvolle Hinweise zum V.Kapitel und Herrn Peter Kafka für viele hilfreiche Diskussionen.
Die beiden Illustrationen am Anfang und Ende der Arbeit stellte mir freundlicherweise Frau Annette Lucks zur Verfügung,das Gedicht stammt von Baudelaire.(Les fleurs du mal,La Mort(1861).)

Lebenslauf

2.10.1950	geboren in Passau
1957-1970	Schulbesuch in Deggendorf
1970	Abitur am Comenius-Gymnasium in Deggendorf
1970-1972	Studium der Physik in Regensburg
1972-1977	Studium der Physik an der Universität München
21.1.1977	Diplomprüfung in Physik, Diplomarbeit bei Prof.Dr.G.Süßmann über das Thema: 'Physik in einem Raum konstanter positiver Krümmung'.
1.3.1977-1.3.1980	Stipendiat am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München
seit 1.3.1980	Wissenschaftlicher Angestellter am Max-Planck-Institut für Astrophysik in Garching bei München